Anali, sv. 30/1992, str. 79–91

Izvorni znanstveni članak
UDK 510.21»17«Cavalieri, B.: Fabri, H.: Gradić, S.
Primljeno: 24. III. 1992.

Ivica Martinović

Fakultet za turizam i vanjsku trgovinu, Dubrovnik

CAVALIERI, FABRI I GRADIĆ O GALILEIEVU PARADOKSU POSUDE

Medu matematičarima, koji su prije Stjepana Gradića vrednovali Galileiev paradoks posude ili paradoks o jednakosti točke i crte izdvajaju se Bonaventura Cavalieri (Gradićev profesor matematike u Bologni) i Honorè Fabri (Gradićev korespondent u 1661, kad je Gradić napisao »De locco Galilaei«. Uporedno proučavanje Galileieva paradoksa iz pera Cavalieria i Fabria omogućuje novo vrednovanje Gradićeve rasprave.

Paradoks, osobito u matemataci, izaziva krizu u njezinu izvornom grčkom značenju, dakle izaziva postupak prosuđivanja i nudi nove poticaje u razvoju matematičkih ideja i metoda. Nezaobilazan primjer takvog djelovanja paradoksa su poznate Russellove antinomije koje su doista izazvale krizu matematike početkom 20. stoljeća (1902) i potakle propitivanje temelja teorije skupova. Plodotvorno djelovanje paradoksa u razvoju matematike ocrtava i jedan drugi paradoks: Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte, poznatiji u matematičkoj literaturi 17. stoljeća kao »paradoks posude«. Iako nije izazvao akutnu krizu u matematici, to je zacijelo paradoks koji je među matematičarima doživio dugotrajan odjek. Dokazni postupak kojim se određuje obujam tijela, a koji vodi Galileievu paradoksu o jednakosti točke i crte, nastojali su, koliko sam dosad uspio ustanoviti, protumačiti Luca Valerio, Galileo Galilei, Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli, Marin Mersenne, Honorè Fabri, Stjepan Gradić, Ruđer Bošković i Bernhard Bolzano.* Najraniji pristup u ovom kronološkom nizu potječe iz 1604. godine, a posljednji iz 1851. godine. Dakako, ovaj dojmljivi niz znamenitih imena pokreće pitanje da li je i kako pristup jednog matematičara utjecao na pristup drugoga koji se kasnije pojavljuje u kronološkom nizu.

To je bilo razlogom što sam, kad sam istraživao Gradićevu raspravu *De loco Galilaei, quo punctum lineae aequale pronuntiat* u njezinu objelodanjenom obliku iz 1680. godine, bio upozorio kako je opravdano izvršiti dodatna istraživanja o njezinu nastanku.[1] Podaci unutar Gradićeve rasprave omogućili su mi da tad zaključim kako je ona nastala do travnja 1661. godine, ali su uz to upućivali na čimbenike

* Autor izražava zahvalnost osoblju Vatikanske knjižnice, Knjižnice Papinskog sveučilišta Gregoriana u Rimu i Knjižnice Male braće u Dubrovniku na njihovoj velikodušnoj susretljivosti prilikom proučavanja rijetkih knjiga iz 17. stoljeća. Sa zahvalnošću ovdje napominjem da sam u prvoj ustanovi proučavao primjerak izdanja Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum, nova quadam ratione promota* (Bononiae, 1653) sa signaturom BAV Racc. Gen. Scienze IV–465, u drugoj proučavao primjerak izdanja Honorè Fabri, *Tractatus physicus de motu locali* (Lugduni, 1646) sa signaturom BPUG Mag 620 L 36, a u trećoj primjerak izdanja Stjepan Gradić, *Dissertationes physico-mathematicae quatuor* (Amstelodami, 1680) sa signaturom KMB 34–II–16.

[1] Ivica Martinović, »Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte u prosuđivanjima Stjepana Gradića i Ruđera Boškovića« u Žarko Dadić (ed.), *Zbornik radova o dubrovačkom učenjaku Stjepanu Gradiću (1613–1683)* (Zagreb: Hrvatsko prirodoslovno društvo, 1985), pp. 49–70, na p. 50.

znanstvenoga života koji su utjecali da se Gradić pozabavi upravo Galileievim paradoksom o jednakosti točke i crte. To me ponukalo na poredbeno istraživanje istog problema u Gradićevih suvremenika. Među matematičarima, koji su proučavali Galileiev paradoks prije 1661. godine, a dolazili su u doticaj s Gradićem i mogli su utjecati na njegov pristup Galileievu paradoksu, izdvajaju se dvojica: Cavalieri i Fabri.

Cavalieriev pristup

Proučavajući rukopis *Vat. lat. 6917* iz Gradićeve ostavštine Stjepan Krasić uočio je dragocjen podatak da je za vrijeme školovanja u Bologni (1637?–1638) Bonaventura Cavalieri bio Gradićevim učiteljem iz matematike.[2] Gradić je, po vlastitu priznanju, usporedo s pravom studirao matematiku ili bar pohađao Cavalierieva predavanja iz matematike. A ova su predavanja mogla pobuditi zanimanje mladoga Gradića za Galileiev paradoks. Osim toga, Cavalieri je svoj pristup Galileievu paradoksu iskazao u svojim objavljenim djelima, a najranije u prepisci s Galileiem tijekom 1634. godine. Ako, dakle, Gradić student u Bologni krajem tridesetih godina ili Gradić djelatni sudionik znanstvenoga života u Rimu na početku šezdesetih godina i nije poznavao pojedinosti iz prepiske Galileia i Cavalieria 1634. godine, on je u Cavalierievim predavanjima mogao doživjeti neki posredni odjek te prepiske, a izbrušeno Cavalierievo stajalište bilo mu je dostupno u tiskanim djelima.

Osnovni dokazni postupak, koji prethodi Galileievu paradoksu, Cavalieri je koristio upravo u svom znamenitom djelu *Geometria indivisibilibus continuorum, nova quadam ratione promota* (1635, 1653), koje je svoje prvo izdanje doživjelo neposredno prije Gradićeva dolaska na studij u Bolognu. Odnosno mjesto je teorem 5 u trećoj knjizi Cavalierieva djela gdje se »izlaže nauk o krugu, elipsi i tijelima koja od njih nastaju«,[3] podrazumijeva se da nastaju vrtnjom, te pripadni korolar. Ti tekstovi u cijelosti glase:

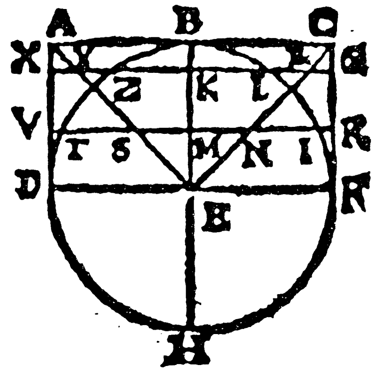
»Teorem V. Stavak V.

Ako se u krugu ili elipsi povuku konjugirane osi ili promjeri, nad jednom od njih kao nad osnovicom neka bude paralelogram, te nad istom osi ili promjerom kruga ili elipse neka bude i trokut ali s osnovicom nasuprotnoj osnovici paralelograma. Neka se na spomenutoj osi ili promjeru odabere bilo koja točka kojom se povuče usporednica spomenutim osnovicama. Kvadrat iste usporednice odsječene stranicama trokuta bit će jednak preostatku od kvadrata onoga što se nalazi među stranicama paralelograma oduzme li mu se kvadrat onoga što ostaje unutar kruga ili elipse.

---

[2] *Vat. lat. 6917,* f. gr: »...Bonaventurae Cavallerio, magistro olim in Academia Bononiensi meo;...« Cfr. Stjepan Krasić, *Stjepan Gradić (1613–1683): Život i djelo* (Zagreb: JAZU, 1987), p. 21 i 477.

[3] Cfr. naslov treće knjige: »Geometriae Cavalerii liber tertius. In quo de Circulo, et Ellipsi, ac Solidis ab eisdem genitis, traditur doctrina« u Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum, nova quadam ratione promota* (Bononiae: Ex Typographia de Ducijs, 1653).



Sl. 1. Uz dokazni postupak za jednakost površina kruga SN i kružnog vijenca VT, IR. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna, 1653), p. 205.

Neka je krug ili elipsa BDHF; njegove konjugirane osi ili promjeri neka su BH i DF; nad jednom od njih, primjerice nad DF, kao nad osnovicom i nad osi ili promjerom BE neka je paralelogram [određen dijagonalom] AF; nad istom [BE], ali s osnovicom AC neka je trokut AEC. Odabere li se na BE ma koja točka M kroz koju se istoj DF povuče usporednica VR koja siječe krivulju DBF u T i I, a stranice trokuta AEC u S i N. Tvrdim, dakle, da je kvadrat SN jednak preostatku kad se od kvadrata VR oduzme kvadrat TI. Naime, pravokutnik HEB se prema pravokutniku HMB odnosi kao kvadrat FE ili kvadrat RM prema kvadratu IM. Dakle, prekretom omjera pravokutnik HEB tj. kvadrat BE se prema kvadratu ME (što je višak pravokutnika HEB spram pravokutnika HMB) odnosi kao kvadrat RM prema ostatku kad se od tog kvadrata oduzme kvadrat MI, ali i kao kvadrat BE prema kvadratu EM, tako i kao kvadrat BC tj. kvadrat MR prema kvadratu MN jer trokuti BEC i MEN imaju jednake kuteve. Dakle, kvadrat BC tj. kvadrat MR se prema kvadratu MN odnosi kao isti kvadrat MR prema preostatku svog kvadrata oduzme li mu se kvadrat MI. A njegovo učetverostručenje tj. kvadrat SN jednak je ostatku kvadrata VR oduzme li mu se kvadrat TI, što je trebalo pokazati.

Korolar

Budući da je pak točka M odabrana proizvoljno, odatle je jasno da su svi kvadrati trokuta AEC (uz ravnalicu DF) jednaki preostatku kad se od svih kvadrata paralelograma AF oduzmu svi kvadrati polukruga ili poluelipse DBF. I [vrijedi] za bilo koje dvoje. Ako se povuku usporednice [ravnalici] DF, primjerice XG i VR, onda je, kako su svi kvadrati trapeza YSNR' jednaki preostatku kad se od svih kvadrata paralelograma XR oduzmu svi kvadrati odsječaka polukruga ili poluelipse između ZL i TI bjelodano zaključiti: Kako je uistinu dokazan omjer svih kvadrata ma kojih paralelograma, koji su iste visine s odsječcima kojima je osnovica jednaka drugom promjeru, prema svim kvadratima trapeza ili trokuta koji u njima postoje, odatle je očigledan njihov omjer prema spomenutim preostacima, i dosljedno prema svim kvadratima odsječaka polukruga ili poluelipse DBF smještenih između spomenutih usporednica, te je primjerice poznat omjer u kojem stoje svi kvadrati paralelograma XR prema svim kvadratima odsječka ZTIL, i tako nadalje. Jer, doista, svi kvadrati trokuta AEC prema svim kvadratima trokuta SEN stoje u trostrukom omjeru istog BE prema EM. Stoga je i jasno da svi kvadrati paralelograma AF od kojih su oduzeti svi kvadrati polukruga ili poluelipse DBF prema svim kvadratima paralelograma VF od kojih su oduzeti svi kvadrati sloja TDFR stoje u trostruku omjeru istog BE prema EM, tj. kao kub od BE prema kubu od EM.«[4]

---

4 Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum,* pp. 204–205.

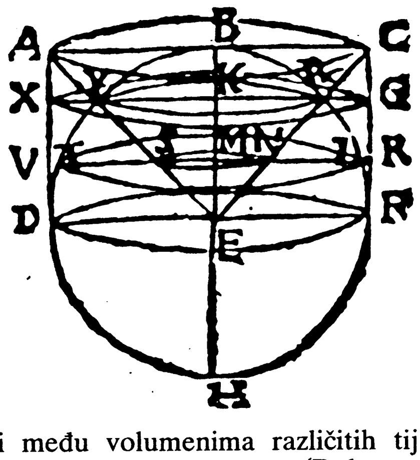
Ako se upotrijebi suvremeni algebarski zapis i simboli na sl. 1, onda teorem 5 izriče tvrdnju:

$SN^2 = VR^2 - TI^2$.

Cavalieri provodi dokaz ovog stavka uporabom razmjera u duhu elementarne euklidske metode, dapače, s dva izričita rubna pozivanja na Euklidove *Elemente*.[5] Ti razmjeri, uobličeni u rečeničnim nizovima, pretočeni u algebarski zapis glase:

(1) $(HE \cdot EB) : (HM \cdot MB) = FE^2 : IM^2$,
(2) $(HE \cdot EB) : ME^2 = BE^2 : ME^2 = RM^2 : (EI^2 - MI^2) = RM^2 : (RM^2 - MI^2)$,
(3) $BE^2 : ME^2 = BC^2 : MN^2 = MR^2 : MN^2$,
(4) $MR^2 : MN^2 = MR^2 : (MR^2 - MI^2)$,
(5) $MN^2 = MR^2 - MI^2/\cdot 4$
(6) $SN^2 = VR^2 - TI^2$.

Tek u korolaru, kad prelazi na likove i međusobne omjere njihovih površina, Cavalieri koristi metodu indivizibila kojoj je upravo u ovom djelu udario temelje i pokazao njezinu učinkovitost u planimetriji i stereometriji. Dovoljno mu je da podsjeti kako je točku M odabrao proizvoljno na BE i da mu kao regula ili ravnalica služi osnovica DF nad kojom je izgrađen pravokutnik određen dijagonalom AF, pa da bi zaključio o jednakosti između zbroja kvadrata svih indivizibila koji grade trapez YSNR' i zbroja kvadrata svih indivizibila koji grade lik koji nastaje kad se od paralelograma određenog dijagonalom XR oduzme kružni odsječak ZTIL. Pritom se izrijekom tvrdi da omjer vrijedi za »ma koje paralelograme«.



Sl. 2. Omjeri među volumenima različitih tijela: Cavalieri *Geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna, 1653), p. 263.

Tu, dakako, još nije riječ o tijelima. Prijelaz na tijela slijedi na kraju treće knjige, prikazan je na sl. 2 i izveden u posebno izrečenom korolaru:

Korolar V:

U korolaru petog stavka, ako pretpostavimo da je poznat omjer u kojem stoje svi kvadrati [paralelograma] AF prema svim kvadratima trokuta AEC, odnosno u kojem stoje svi kvadrati [paralelograma] XR prema svim kvadratima trapeza YSNR', kao da smo ga učinili već poznatim, dobivamo u kojem omjeru stoje svi

[5] Cavalieri se poziva na stavak 5 u drugoj knjizi Euklidovih *Elemenata:* »Pravokutnik sastavljen od nejednakih dijelova jedne dužine jednak je kvadratu nad polovicom te dužine«, kao i na stavak 4 u šestoj knjizi *Elemenata:* »U jednakokutnim trokutima stranice uz isti kut su razmjerne.« Cfr. Euklid, *Die Elemente,* nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer (Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1980), p. 36 i 114.

kvadrati [paralelograma] AF prama ostatku oduzmu li se svi kvadrati polukruga ili poluelipse DBF, te u kojem omjeru stoje svi kvadrati [paralelograma] XR prema ostatku oduzmu li se svi kvadrati odsječka YTIR'. Odatle je jasno u kojem omjeru stoji tijelo nastalo od AF, bilo da je valjak ili prizma ili samo valjkasto tijelo, prema tijelu nastalom od polukruga ili poluelipse DBF, bilo da je ono polukugla ili polukuglasto ili samo tijelo slično onom nastalom od DBF. Isto tako je jasno u kojem omjeru stoji tijelo nastalo od XR, što god da ono jest, prema tijelu nastalom od odsječka YTIR'. Na isti način bio bi bjelodanim i omjer tijela koje je nastalo od AG prema tijelu nastalom od odsječka YBR', i tako nadalje. Na drugi način od prije spomenutog natuknuti su, dakle, omjeri među tijelima koja su uzajamno na sličan način nastala od paralelograma kojima je osnovica jednaka drugom promjeru tj. kojima je osnovica jednaka sâmom DF, i [koja su nastala vrtnjom] oko istih osi ili promjerâ ma kojih odsječaka YBR', TYR'I, DTIF i DBF, što se htjelo razjasniti. A to je na uobičajen način prikazano na gore postavljenoj slici [sl. 2], a što nije bilo utemeljeno samo s jednim jedinim postupkom!«[6]

Odmah je prepoznatljivo kako Cavalieri i u ovom korolaru početno promatra odnos koji vlada među zbrojevima kvadratâ svih indivizibila koji grade površinske likove, u ovom konkretnom slučaju koji grade paralelogram AF i trokut AEC, odnosno paralelogram XR i trapez YSNR'. Na temelju tog omjera on izriče tvrdnju u kojem omjeru stoje volumeni različitih tijela koja nastaju vrtnjom paralelograma AF i polukruga DBF. Taj omjer biva očuvan uvijek kad vrtnjom geometrijskog lika, koji sudjeluje u početnom omjeru, nastane tijelo »što god da ono jest« *(quodcunque illud sit)*.[7] Ipak, Cavalieri ne promatra što se s tijelima događa na kraju postupka u kojem sve manjima bivaju njihovi presjeci: trokut SEN s jedne strane, a lik koji nastaje kad se od paralelograma VF oduzme kružni odsječak DTIF i koji vrtnjom tvori »posudu« s druge strane. Zašto Cavalieri postupa protivno Galileievu zamišljaju postaje jasno čim se prouči njegova prepiska s Galileiem neposredno prije objavljivanja prvog izdanja Cavalierieva djela *Geometria indivisibilibus continuorum*. Iz pisama što ih je s nadnevcima 2. listopada i 19. prosinca 1634. Cavalieri uputio Galileiu slijedi da je Galilei svoje dvojbe glede paradoksa posude podijelio sa svojim učenikom i prijateljem Cavalieriem.[8] A to znači da dva znamenita djela, Cavalierieva *Geometria* (1635) i Galileievi *Discorsi* (1638), sadrže upravo ona stajališta dvojice znanstvenika koja su se iskristalizirala unutar i nakon prepiske.

Prvi Cavalieriev prigovor, onaj iz pisma 2. listopada 1634., usredotočuje se na dimenzije geometrijskih entiteta na kraju postupka. Galilei mu je bio pismeno priopćio kako dokazuja jednakost volumena dvaju tijela: stošca koji nastaje vrtnjom trokuta AEC i »posude« koja nastaje vrtnjom lika koji se dobiva kad se od paralelograma AF oduzme polukrug DBF (sl. 2). Galilei je istu tvrdnju dokazao za tijela nastala tako da se stožac i posuda presijeku ravninom na razini XG ili još bliže vrhu na razini VR. Da bi dokazao jednakost volumena dvaju tijela, utvrdio je jednakost površina za osnovice takvih tijela. U konačnici, ustvrdio je Galilei, vrijedi jednakost između vrha stošca – točke E i vrha posude – kružnice s promjerom DF. Cavalieri

[6] Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum*, p. 263.

[7] L. c.

[8] Cfr. Giulio Giorello, »Galilee Cavalieri et les indivisibles« *Actes 'Jourees Galilee'*, Cahier g (1980), pp. 1–21, osobito prikaz neslaganja izmedu Galileia i Cavalieria glede paradoksa posude na temelju Cavalierievih pisama Galileiu na pp. 16–17; François de Gandt, »Les indivisibles de Torricelli«, *Cahiers du Séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences* 17 (1983/1984), pp. 36–118, osobito poglavlje »Les indivisibles comme vestiges ultimes et le paradoxe du bol«, pp. 89–90.

je osporio ovaj zaključak jer je Galilei iz jednakosti površina zaključio jednakost geometrijskih entiteta kojima je umanjena dimenzija.[9]

Drugi Cavalieriev prigovor, iskazan u pismu 16. prosinca 1634., izvire iz njegova razumijevanja metoda indivizibilâ i stoga je dalekosežniji. Prema metodi indivizibilâ ili, kako sam Cavalieri kaže, »secondo le mie definitioni«, pojam svih crta jednog ravnog lika ili svih ploha jednog tijela ne uključuja krajnje tvorbe, makar i izgledaju da su iste vrste. Obrazloženje može uvjeriti i matematičara i fizičara, što znači da ga je Cavalieri prilagodio Galileievu znanstvenom interesu:

> kako sve crte jednog ravnog lika držim zajedničkim presjecima ravnine koja siječe lik gibajući se od jednog njegova kraja do drugog ili od jadne tangente do njoj suprotne; zatim kako početak i kraj gibanja nisu gibanje, to se krajnje tangente ne mogu ubrojiti među sve crte.[10]

Cavalieri time upozorava Galileia kako pitanje o granici geometrijskog lika u sklopu metode indivizibilâ nije primjereno ili nije smisleno. A Galilei svojim paradoksom postavlja upravo to pitanje. Iako pismo u kojem ja Galilei predočio Cavalieriu paradokse posude nije sačuvano, Galilei je zacijelo bio oblikovao svoje pitanje tako da je ono u bitnom bilo jednako pitanju koje je četiri godine poslije ove prepiske u svom djelu *Discorsi* postavio o točki i crti:

> »zašto se one ne smiju nazvati jednakima ako jesu posljednji ostaci i tragovi dobiveni od jednakih veličina?»[11]

Cavalieri, naprotiv, drži da unutar vlastite matematičke metodologije može opravdano zaključiti da pitanje o jednakosti površina nije i pitanje o njihovim granicama. Pritom ga vlastiti odgovor na Galileiev *dubio della scodella* osnažuje u uvjerenju da je izgradnjom metode indivizibila pronašao uspješnu metodu u geometriji.

Fabrijev pristup

Pri kraju rasprave *De loco Galilaei, quo punctum lineae aequale pronuntiat* Gradić je upozorio da se u Rimu susretao sa znanstvenicima koji su kritički razmatrali Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte, te da je s njima ne jednom raspravljao o tom pitanju.[12] Dapače, oni su se usudili peckati Galileia nepranim jezikom i prigovarati mu zbog očitog paralogizma. Jedan znanstvenik iz tog rimskog kruga, za kojega sam neprijeporno utvrdio da se bavio Galileievim paradoksom, bio je Honorè Fabri. On je svoja gledišta o Galileievu paradoksu uvrstio u predavanja iz fizike *Tractatus physicus de motu locali* što su tiskom objelodanjena u Lyonu 1646. godine.[13] Rasprava o mjesnom gibanju objavljena je upravo one

---

[9] Galileo Galilei, *Opere,* Edizione Nazionale, vol. XVI, pp. 136–137); cfr. Giulio Giorello, »Galilee, Cavalieri et les indivisibles«, p. 16.

[10] Galileo Galilei, *Opere,* Edizione Nazionale, vol. XVI, p. 175; cfr. Giulio Giorello, »Galilee, Cavalieri et les indivisibles«, p. 17; François de Gandt, »Les indivisibles de Torricelli«, p. 90.

[11] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* u *Opere,* vol. IV (Firenze, 1935), p. 157: »li quali perchè non si devon chiamare eguali, se sono le ultime reliquie e vestigie lasciate da grandezze eguali?«

[12] Stjepan Gradić, »De loco Galilaei, quo punctum lineae aequale pronuntiat«, u *Dissertationes physico-mathematicae quatuor* (Amstelodami, 1680), p. 53: »non semel postea disputavi cum plerisque aliis qui tanquam erroris, ac manifesti paralogismi convictum Virum doctissimum illoto ore carpere ac vituperare sunt ausi«. Cfr. Martinović, »Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte u prosuđivanjima Stjepana Gradića i Ruđera Boškovića«, osobito poglavlje »Okolnosti nastanka Gradićeve rasprave«, pp. 53–54.

[13] *Tractatus physicus de motu locali, in quo effectus omnes, qui ad impetum, motum naturalem, violentum, et mixtum pertinent, explicantur, et ex principiis Physicis demonstrantur.* Auctore Petro Mov-

godine kad je Fabri okončao svoja predavanja iz filozofije i matematike u Lyonu i započeo sa službom penitencijara u Bazilici Sv. Petra, službom koju će obnašati sve do 1680. godine i koja će ga potaknuti na plodna istraživanja u moralnoj teologiji.[14] U razdoblju kad je nastajala rasprava *De loco Galilaei* Fabri je bio u znanstvenoj prepisci s Gradićem. Fabrievo pismo Gradiću, upućeno 7. siječnja 1661., sadržavalo je prigovore na rukopis jedne ranije Gradićeve rasprave, one o zakonu slobodnog pada *De causa naturali motus accelerati*...[15] Fabri je jasno oblikovao svoje prigovore: zašto indiferentnost tijela prema mirovanju ili gibanju? zašto trenutačno djelovanje uzroka? zašto je sastavljanje dvaju gibanja uvijek moguće? Nema, dakle, sumnje da su Fabri i Gradić zajedno pretresali otvorena prirodoznanstvena pitanja. U tim razgovorima Gradić je mogao neposredno upoznati Fabrievo mišljenje o Galileievu paradoksu, kao i možebitnu evoluciju Fabrievih gledišta od lyonskog izdanja njegove mehanike 1646. godine pa do 1661. godine.

U sklopu svojih lyonskih predavanja Fabri u cijelosti predočuje ozračje Galileieva pristupa, odnosno misaoni tijek razgovora što su ga Salviati, Simplicio i Sagredo zapodjenuli prvoga dana u Galileievim *Discorsi.* Galilei je na uvodno pitanje, koje je dodjelio Salviatiu: »Da li je unutar konačne protežnine moguće otkriti beskonačan broj praznina?«, odgovorio razlaganjima o Aristotelovu kotaču i paradoksu posude kojega je upravo tom prilikom oblikovao.[16] Poticaj za raspravljanje o Aristotelovu kotaču Fabri je, po vlastitu priznanju,[17] pronašao u dvojice matematičkih pisaca: *Blancanus* i *Mersennus.* Prvi je gotovo sigurno talijanski isusovac Giuseppe Biancani (1566–1624) koji je svojim djelom *Aristotelis loca mathematica, ex universis ipsius operibus collecta et explicata* (Bologna, 1615) doprinio početnim istraživanjima iz povijesti matematike,[18] a drugi je francuski minorit Marin Mersenne koji je o Aristotelovu kotaču pisao u predgovoru uz svoj prijevod Galileieve *Mehanike.*

Deveta knjiga Fabrieva djela, kako to ističe njezin naslov, raspravlja »o gibanju sastavljenom od pravocrtnog i kružnog gibanja ili od više kružnih gibanja«.[19] Niz od sedam teorema na početku devete knjige opisuje gibanje kotača koji se kotrlja po ravnoj površini, tj. gibanje sastavljeno od pravocrtnog gibanja središta i kružnog gibanja oboda. Odatle se prirodno nadovezuje digresija o Aristotelovu kotaču, paradoksu koji je u Aristotelovoj *Mehanici* izložen kao 24. pitanje (sl. 3).[20] Aristotelov kotač čine dva koncentrična kotača sa središtem A i s polumjerima AB i

snerio Doctore Medico: cuncta excerpta ex praelectionibus R. P. Honorati Fabry, Societatis Iesu (Lugduni: Apud Ioannem Champion, in foro Cambij, 1646).

[14] Cfr. Mijo Korade, »Diskusija Stjepana Gradića i Honorèa Fabrija o probabilizmu«, u Žarko Dadić (ed.), *Zbornik o dubrovačkom učenjaku Stjepanu Gradiću (1613–1683),* pp. 99–106, osobito pp. 101–102, te bilj. 22 na p. 105.

[15] Cfr. Žarko Dadić, »Stjepan Gradić o problemima mehanike«, u Žarko Dadić (ed.), *Zbornik o dubrovačkom učenjaku Stjepanu Gradiću (1613–1683), pp. 35–40, osobito na pp. 36–37.*

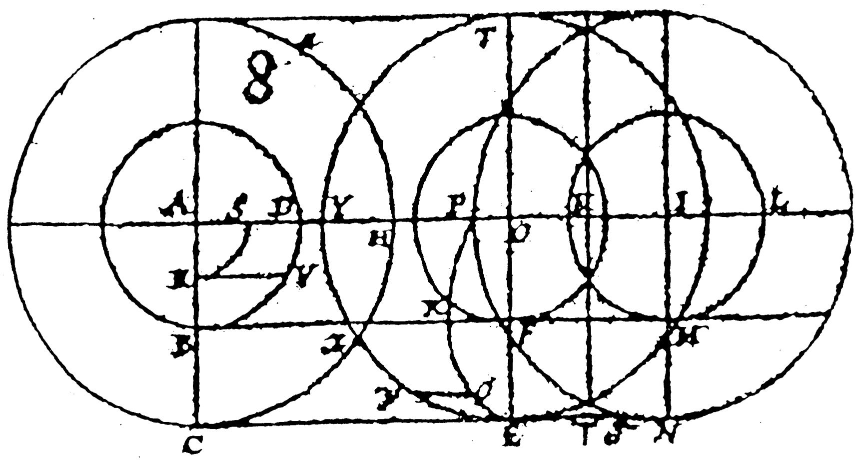
[16] Galilei, *Discorsi,* pp. 148–161. Taj je odlomak uvršten u strogi izbor matematičkih vrela: Galilei, »On infinities and infinitesimals«, u Dirk J. Struik (ed.), *A source book in mathematics,* 1200–1800 (Princeton: Princeton University Press, 1986), pp. 198–207.

[17] Honorè Fabri, »Digressio de rota Aristotelica«, u *Tractatus physicus de motu locali,* pp. 339–346, nn. 1–29, na p. 339: »Aristoteles hanc difficultatem habet, quaest. 24. Mechanicorum, quam etiam explicat Blancanus, proponitque Mersennus in praefatione suae versionis mechanicarum Galilei.«

[18] Cfr. Gino Loria, *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX* (Milano: Cisalpino–Goliardica, 1982), p. 368.

[19] Honorè Fabri, »Liber nonus, de motu mixto et recto, et circulari, vel ex pluribus circularibus«, u *Tractatus physicus de motu locali, pp. 334 sqq.*

[20] Fabri, »Digressio de rota Aristotelica«, p. 339; vidi bilješku 17.



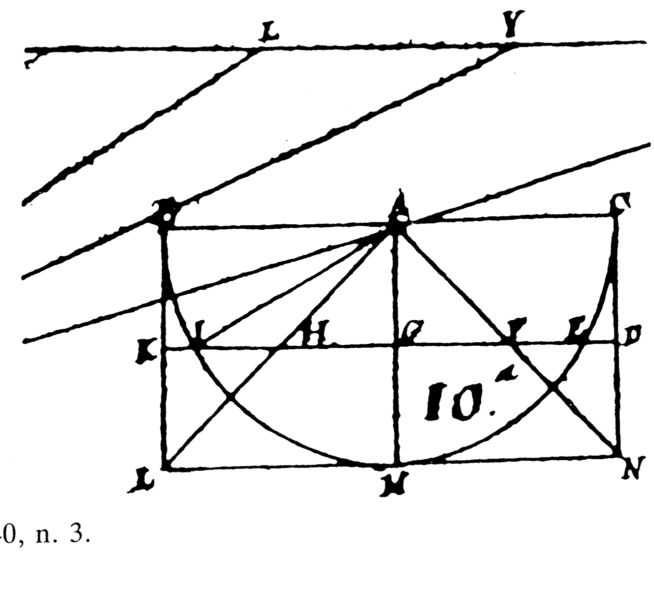
Sl. 3. Aristotelov kotač. Fabri, *Tractatus physicus de motu locali* (Lyon, 1646), Tab. 4, Fig. 8.

AC, gdje je primjerice AC = 2 AB, a koji se zakotrljaju za dužinu CE koja je jednaka luku CH tj. četvrtini oboda. Poslije tako opisana kotrljanja polumjer AH dospijeva u položaj određen dužinom GE, a polovište D polumjera AH u polovište F polumjera GE. Iz perspektive Aristotelove *Mehanike* nedvojbeno je da pojedinim točkama luka CH odgovaraju pojedine točke dužine CE, ali je dvojbeno da li pojedine točke luka BD unutarnjeg kotača odgovaraju pojedinim točkama dužine BF. Fabrievim riječima:

»Nadalje, izvor poteškoće sastoji se upravo u tome što je BF dvostruk luku BD, dakle, ili pojedine točke luka BD odgovaraju u silasku pojedinim točkama BF, ili pojedine točke BD odgovaraju dvjema točkama BF, ili naizmjenične točke BF skokimice ostaju posve netaknute. Ali izgleda da se ništa od ovoga ne može ustvrditi.«[21]

S matematičkoga stajališta najupitnije je Fabrievo obrazloženje zašto se ne može utvrditi obostrano jednoznačno pridruživanje točaka na luku BD točkama na dužini BF. Ako na luku BD ima toliko točaka koliko ih ima na dužini BF, koja je jednaka luku CH, onda bi dvostruko manji luk bio jednak dvostruko većem, što se ne može tvrditi. Fabri se, dakle, poslužio redukcijom obostrano jednoznačnog pridruživanja na odnos dijela i cjeline.

Galilei je poslije rasprave o Aristotelovu kotaču u *Discorsi* izložio svoj paradoks posude, a isti redoslijed izlaganja poštovao je i Fabri. Evo, kako je on izložio Galileiev paradoks:



Sl. 4. Jednakost točke i crte. Fabri, *Tractatus physicus de motu locali* (Lyon, 1646), Tab. 4, Fig. 10.

[21] Fabri, »Digressio de rota Aristotelica«, p. 340, n. 3.

»8. Uz to, da ne izostavim ono što je čudesno mjesto u istoga Galileia, kojim je mjestom, dakako prvotno nastojao potvrditi onaj svoj učinak, naime, da se može ustvrditi da je točka jednaka crti (sl. 10, tab. 4 = sl. 4). Neka je pak zadan polukrug ABMC, pravokutnik BN, trokut ALN, pravac KD usporedan s HC, napokon i AI. Neka se oko osi AM okreće sve troje. Jamačno, pravokutnik daje valjak, trokut stožac i polukrug polukuglu. Neka ista ravnina KD usporedna s BC siječe ovo troje. Nedvojbeno će presjek stožca HF biti krug, i to jednak površini obuhvaćenoj dvama usporednim kružnicama od kojih veća ima promjer KD, a manja IE, što se kratko dokazuje...

9. Odatle [iz jednakosti kruga promjera HF i kružnog vijenca sa širinom IK, ED] Galilei je zaključio da je točka vrha stožca A jednaka kružnici promjera BC, što doista, čini mi se, ne slijedi. Budući da se uvijek radi o osnovici stožca koja nije točka, te ako je stožac HFA jednak tijelu KIB oduzme li se, dakako, polukugla od valjka, što pak Galilei ne dokazuje nego pretpostavlja da je dokazao Luca Valerio, nikad se presjekom neće dospjeti do matematičke točke, jer će uvijek stožac biti jednak drugom tijelu. A ako tko dopučta fizičke točke, može još k tome dopustiti da je stožasta fizička točka jednaka drugom tijelu koje je najvećma protegnuto zbog kuta dodira KBI u čemu, izgleda, nije poteškoće.

10. Da je pak stožac HAF jednak prije spomenutom tijelu što ga Galilei zove kružnom udubinom *(scalprum orbiculare)*, dokazujem s malo riječi. Kako je osnovica HF jednaka KI, ED, to jest vijencu, tako su i pojedine osnovice iznad HF sve do vrha A. Doista, cijelo [tijelo] HFA koje se sastoji od svih osnovica jednako je cijelom tijelu ili udubini koja se sastoji od svih vijenaca. Ovo sam usput htio spomenuti da ne bi tko procijenio da smo štogod možda prikrili...«[22]

U prikazu Galileieva paradoksa posude Fabri je prvo pecnuo Galileia da je preuzeo Valerijev dokaz za jednakost stožca i kratera, a zatim je sam ponudio obrazloženje da su volumeni tih dvaju tijela jednaki. Fabriev dokaz za jednakost volumena temelji se u potpunosti na *metodi indivizibila:* cijeli stožac koji se sastoji od svih krugova jednak je cijeloj kružnoj udubini koja se sastoji od svih vijenaca. Fabri pritom prešućuje ključno pitanje *kako* postiže da stožac bude izgrađen od svih svojih osnovica, tj. od svih krugova koji nastaju kao presjeci ravnine usporedne s osnovicom stožca. A kad tvrdi da je presjek stožca uvijek površina a nikad točka, Fabri ponovno ne obrazlaže *kako* se to postiže.

Oba paradoksa, Aristotelov kotač i Galileiev paradoks posude, služe Fabriu u istu svrhu za koju su već poslužili Galileiu. Fabri želi iskazati svoje mišljenje o problemu *compositio et resolutio continui,* pa se usredotočuje na poteškoću iskazanu Aristotelovim kotačem. S matematičkog stajališta ta se poteškoća svodi na pitanje postoji li i kako se ostvaruje korespondencija među točkama dviju nejednakih dužina, a s fizičkog stajališta ona raspravlja narav kružnoga gibanja. Da bi razjasnio prijepor, Fabri vrednuje nekoliko hipoteza. Po jednoj se neprekidnina *(continuum)* sastoji od matematičkih točaka, po drugoj od razmjernih dijelova kojih je aktualno beskonačno mnogo, po trećoj od fizičkih točaka ili dijelova koji su potencijalno djeljivi u beskonačnost.[23] Prva pretpostavka, neovisno o tome uzima li se da postoji beskonačno ili konačno mnogo matematičkih točaka, ne nudi jednoznačan odgovor o pridjeljivanju točaka luka BD točkama dvaput veće dužine

---

[22] Ibid., pp. 341–342, nn. 8–10.

[23] Fabri, »Digressio de rota Aristotelica«, p. 342, n. 11: »iuxta hypothesim punctorum mathematicorum«; p. 342, n. 12: »iuxta hypothesim partium proportionalium infinitarum actu«; p. 342, n. 14: »iuxta hypothesim punctorum physicorum, vel partium divisibilium in infinitum potentiâ«.

BF. Druga pretpostavka uvodi nejasan pojam dodira u neodređenom dijelu *(contactus in parte indeterminata)*. Preostaje treća pretpostavka o fizičkim točkama, ali ni ona ne isključuje prigovore. Osnovni je prigovor kako pridijeliti zakrivljenu fizičku točku luka BD ravninskoj fizičkoj točki dužine BF, kad je jasno da se ništa zakrivljeno ne može izjednačiti ili sumjeriti s ravnim. Na ovom mjestu, kao i u razglabanju druge pretpostavke, Fabri upućuje na podrobniju razradu ovih pitanja u svojoj metafizici. Konačno rješenje prijepora o sastavu i rastavu neprekidnine Fabri traži u metafizičkom obrazloženju, a ne u matematičkom dokazu.

Izvornost Gradićeva pristupa

Poslije prouke Cavalierieva i Fabrieva pristupa Galileievu paradoksu posude moguće je iznova procijeniti Gradićev pristup.[24] Njegova rasprava *De loco Galilaei, quo punctum lineae aequale pronuntiat* po vremenu nastanka i po vremenu objelodanjenja mogla se opravdano smjestiti u razdoblje koje omeđuju dva temeljna djela prirodoznanstvenoga napretka u 17. stoljeću, Galileievi *Discorsi* (1638) i Newtonova *Principia* (1687), a sada je, na temelju proučavanja izvornih tekstova njegova profesora Cavalieria i njegova djelatna sugovornika u rimskoj znanstvenoj sredini Fabria, moguće podrobnije govoriti u kojoj je mjeri Gradić izvoran, a u kojoj mjeri razvija ili usvaja Cavalierieve i Fabrieve ideje.

U raščlambi Galileieva paradoksa Gradić se redom usredotočio na tri primjedbe: koji je smisao krajnje posljedice paradoksa? kojega je karaktera proces uniformne procesije kojom se ravninski presjek stožca i kružne udubine približava vrhu tih tijela? kako treba izgrađivati metodu za mjerenje volumena sa zakrivljenom granicom?

Prema Gradiću, tvrditi jednakost točke i crte znači u krajnjoj posljedici tvrditi da je bezdimenzionalna točka jednaka trodimenzionalnom kvantitetu, stoga i protusloviti smislu Euklidove definicije točke. Ali, dok Euklidova definicija točke uključuje pojam nedjeljivosti *(cujus pars nulla est)*, Gradić točki radije pripisuje nemjerljivost *(res nullius mensurae)*.[25] Gradićev terminološki izbor sadrži implicitno osporavanje indivizibila, pogotovo kad se to usporedi s Cavalierievim i Fabrievim izričitim pozivanjem na metodu indivizibila u analizi Galileieva paradoksa posude. Jer, Cavalieri u spomenutom korolaru uz teorem 5 razmatra omjere geometrijskih likova uz pretpostavku da su sastavljeni od crta, a Fabri jednakost volumena stožca i kružne udubine izvodi iz jednakosti zbroja svih krugova i zbroja svih kružnih vijenaca na koje se likove ta tijela razlažu.

Drugi Gradićev terminološki izbor još je dalekosežniji: *uniformis processio*. Novi pojam označuje postupak koji se provodi za osnovice stožca i kratera kad ih se shvati kao presjeke ravnine koja se neprekinuto približuje vrhu stožca, odnosno obodu kratera. Time jednakost kruga i kružnog vijenca kao dvaju presjeka ravnine biva dinamički shvaćena. A istražiti karakter uniformne procesije znači uočiti razlog ili razloge zašto se na kraju tog postupka javlja paradoks da je točka jednaka crti. Prvi Gradićev uvid tiče se granica jednakih površina. Gradić izričito kaže da iz jednakosti površina ne slijedi nužno jednakost granica. Nesklad u veličini između gra-

---

[24] Vidi moju analizu Gradićeve rasprave *De loco Galilaei* u njezinu objelodanjenom obliku iz 1680. godine u Martinović, »Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte u prosuđivanjima Stjepana Gradića i Ruđera Boškovića«, osobito pp. 54–62. Zaključke ovog mog istraživanja koristim ovdje samo onoliko koliko to iziskuje usporedba Gradićevih stavova s izvornim tekstovima Bonaventure Cavalieria i Honorè Fabria a u svemu ostalom upućujem na spomenuti rad.

[25] Gradić, *De loco Galilaei*, p. 42: »...punctum ipsum, hoc est rem nullius mensurae...«.

nice kruga i kružnog vijenca očigledan je za proizvoljno odabranu ravninu presjeka, a još se više izražava napredovanjem procesije *(in progressu processionis)*.[26] Gradić još spominje da u geometriji nema pravila po kojima bi se od jednakosti granica zaključila jednakost kvantiteta koji su ograničeni tim granicama.[27] Uz to, Gradićev pojam *uniformis processio* ravnine presjeka sadrži, kao svoj puni smisao, približavanje granici. Očigledno, Gradić razmatra pitanje o granicama jednakih površina bitno drukčije nego Cavalieri. U sklopu Cavalierieve metode indivizibila, kako osobito svjedoči njegova prepiska s Galileiem, pitanje o jednakosti površina nije i pitanje o njihovim granicama, pogotovo zato što pojam površine geometrijskog lika kao ukupnosti svih crta tog lika isključuje granicu tog lika.

Gradić je najviše pozornosti posvetio dokazu za jednakost stožca i kratera što ga je Luca Valerio izložio u djelu *De centro gravitatis solidorum* (1604). Dok se Galilei samo pozvao na Valerijev dokaz, Gradić ga je podrobno istražio ne bi li u dokaznom postupku uočio izvor paradoksa. Oživljavajući arhimedovsku metodu za određivanje obujma tijela sa zakrivljenom granicom, Valerio je stožac i krater razdijelio ekvidistantnim ravninama, usporednim zajedničkoj osnovici tih dvaju tijela. Tako je, koristeći Gradićevu terminologiju, Valerio dobio valjke *(cylindri)* i valjkaste okruge *(orbes cylindrici)* koji grade stepeničaste tvorbe koje nisu jednake obujmu stožca i kratera, ali im se po obujmu približavaju kad se povećava broj ekvidistantnih ravnina koje presijecaju oba tijela. Gradićev prikaz u znanstvenom okolišu njegova doba odskače upravo po strogosti matematičkih izričaja.[28] Gradić, primjerice, koristi ove izričaje: »svakom pojedinom valjku, sastavnici stošca, odgovara valjkasti okrug iste veličine [sastavnica kratera]«, »ako bi takvo umnažanje presjeka [ravninom] poraslo na ma koji broj«, »onaj nazubljeni lik sastavljen od ma koliko valjkastih okruga, primiče li se na ma koju približnost krateru«. Takvi izričaji omogućuju Gradiću izvoran opis prijelaza od konačno mnogo na beskonačno mnogo dijelova stošca i kratera, tj. opis prijelaza od stepeničastih tvorbi prema tijelima kojih je površina potpuno *(plane)* stožasta ili savršeno *(perfecte)* kraterasta. Osim toga, Gradić uvodi pojam po volji male aproksimacije *(quaecumque proximitas)* i zaključuje da aproksimacije, koje se promatraju istodobno u odnosu na stožac i krater, ostaju tijekom opisana procesa uvijek međusobno jednake. Manjak je Gradićeva pristupa što on *aktualno,* a ne potencijalno, shvaća zbroj beskonačnoga reda, te grešku koja nastaje kad se umjesto tijela razmatra u njega upisana stepeničasta tvorba.

Gradićeva prosudba Valerijeva dokaza odlikuje se još jednom zamisli. Tu Gradić iznova propituje odnos geometrijske tvorevine i njezine granice, ovoga puta uz pomoć Euklidovih aksioma A2–A4 o jednakosti i nejednakosti veličina.[29] U Gradićevu razmatranju pojavljuju se dvije protivne pretpostavke. Prema prvoj pretpostavci točka i kružnica jesu sastavni dijelovi stošca i kratera, a prema drugoj točka i kružnica to nisu. Na osnovu usporedbe s Cavalierievim pristupom slijedi da Gradićeva prva pretpostavka izravno proturječi metodi indivizibila, dok Gradićeva druga pretpostavka usvaja isto polazište kao i metoda indivizibila. Iz te perspektive može se procijeniti i Gradićev zaključak da obje pretpostavke vode proturječju. Gradićevo istraživanje odnosa geometrijske tvorevine i njezine granice pokazuje

[26] Gradić, *De loco Galilaei,* p. 47.

[27] Gradić, *De loco Galilaei,* pp. 44–45.

[28] Gradić, *De loco Galilaei,* pp. 48–50. Cfr. moj prijevod odnosnog odlomka Gradićeve rasprave u Martinović, »Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte u prosuđivanjima Stjepana Gradića i Ruđera Boškovića«, p. 58, gdje sam kurzivom istaknuo sve pojmove bitne za matematičko razumijevanje teksta.

[29] Cfr. Euklid, Die Elemente, p. 3.

da polazište metode indivizibila ne odlučuje u pogledu utvrđivanja izvora Galileieva paradoksa posude. Dapače, Gradić ističe kako druga pretpostavka kao ishodište metode indivizibila onemogućuje verifikaciju trećeg Euklidova aksioma: »Naime, za verifikaciju aksioma o jednakosti ostatka iz jednakosti oduzetih dijelova od jednakih cjelina nužno je da se dotične jednake cjeline koje se međusobno uspoređuju sastoje od svakog svog oduzetog dijela i ostatka kao od sastavnih dijelova.«[30] Kako je pretpostavka da točka i kružnica nisu sastavni dijelovi stošca i kratera baš Cavalierievo polazište, to znači da je Gradić uočio jednu slabu stranu metode indivizibila.

Gradić je i u prikazu i u prosudbi Galileieva paradoksa ustrajao na matematičkom obrazloženju. U tu je svrhu upotrijebio matematičke pojmove, kao što su *mensura, uniformis processio, proximitas,* oblikovao stroge matematičke izričaje i ponudio nove matematičke zamisli za razumijevanje postupka kojim se približujemo granici geometrijske tvorevine, kao i za razumijevanje odnosa geometrijske tvorevine i njezine granice. I dok je Fabri pred istim problemom posegnuo za metafizičkim obrazloženjem, Gradić je odolio toj kušnji unatoč svom zavidnom filozofskom obrazovanju.

Stoga Gradićev pristup Galileievu paradoksu nije samo izdvojen glas u šezdesetim godinama 17. stoljeća, već izvorno uočavanje jednoga procesa, kojega nerazumijevanje dovodi do paradoksa a kojega razumijevanje utire nove matematičke puteve prema infinitezimalnoj metodi. Poredbeno proučavanje izvornih tekstova, u kojima su Gradićevi prethodnici Cavalieri i Fabri tumačili ili primjenjivali dokazni postupak koji vodi proturječnu zaključku o jednakosti točke i crte, još više osnažuje ocjenu da je Gradić u proučavanju graničnog procesa ponudio izvoran put prema infinitezimalnoj metodi, nažalost neuočen, stoga nedjelatan u razvoju matematike u 17. stoljeću i kasnije. Štoviše, i Ruđer Bošković, profesor matematike u Rimskom kolegiju gdje je jedno stoljeće ranije Stjepan Gradić bio pitomcem, nije poznavao Gradićevo matematičko djelo. Čak i za Boškovića Stjepan je Gradić, predstojnik Vatikanske knjižnice, bio prvenstveno tvorac elegantnih latinskih stihova i cenzor književnog stvaralaštva u Italiji.[31]

---

[30] Gradić, *De loco Galilaei,* p. 51: »nam ad verificandum axioma de aequalitate residui ex aequalitate ablatorum à totis aequalibus, necesse est, ut illa tot aequalia quae invicem comparantur à suo quaeque ablato, et residuo tanquam à partibus integrantibus componantur,...«.

[31] Ruđer Josip Bošković, *De Solis ac Lunae defectibus* (Venetiis: Typis Antonii Zatta, 1761), bilješka na p. 261: »Stephanum Gradium elegantissimum latinum poetam eo ipso superiore saeculo, quo usque adeo conciderant in Italia humaniores litterae corruptae penitus, ac depravatae.«

Ivica Martinović

CAVALIERI, FABRI AND GRADIĆ ON GALILEO'S PARADOX OF THE BOWL

Summary

Two scientists who stand out among all the mathematicians who evaluated Galileo's paradox of the bowl i.e. the paradox of equality of point and line, before Gradić are Bonaventura Cavalieri, Gradić's professor of mathematics in Bologna and Honorè Fabri, Gradić's correspodent in 1661 the year Gradić wrote *De loco Galilei.*

Cavalieri utilized the proof of equality between volumes of cone and crater of leading to Galileo's paradox in his famous work *Geometria indivisibilibus continuorum* and formulated objections arisen from his understanding of the method of indivisibles in the correspondence with Galileo in 1634. Fabri's viewpoint on Galileo's paradox was included in his lectures of physics *Tractatus physicus de motu locali* (1646). He consistently applied the method of indivisibles and refered on detailed classification of the problem *compositio et resolutio continui* in his metaphysics.

The comparative study of Galileo's paradox by Cavalieri and Fabri enables the reevaluation of Gradić's treatise. Opposed to Fabrio, Gradić insisted on mathematical argumentation. He introduced the concept of the *uniformis processio* of a plane in order to describe the approaching to the limit of a geometric creation. Gradić's treatise contains the original description of transition from the finite to the infinite number of portions of cone and cater, i.e. form the denticulated forms to the perfect solids of cone and crater. This is confirmed by the rigor of mathematical statements and by the concept of whatever approximation *quaecumque proximitas*. Researching the relation between geometric object and its limit Gradić pointed out that the starting point of Cavalieri's method of indivisibles »limit is not component part of geometric object«, kept from verifying Euclid's third axiom on the equality of residues.

Studying the limiting process toward the infinitesimal method Gradić offered an authentic way, which was not recognized in the 17th century and after.

UDK 93/99 ISSN 1330–0598

ANALI

ZAVODA ZA POVIJESNE ZNANOSTI HRVATSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI U DUBROVNIKU

ANALI	Sv. XXX	Str. 1–152	DUBROVNIK 1992