ZBORNIK RADOVA O DUBROVAČKOM UČENJAKU STJEPANU GRADIĆU
Zagreb 1985.

IVICA MARTINOVIĆ

GALILEIEV PARADOKS O JEDNAKOSTI TOČKE I CRTE U PROSUĐIVANJIMA STJEPANA GRADIĆA I RUĐERA BOŠKOVIĆA

Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte, izložen u Discorsi (1638), nastojala su protumačiti dvojica Dubrovčana Stjepan Gradić i Ruđer Bošković. U raspravi De loco Galilaei quo punctum lineae aequale pronuntiat, dovršenoj u Rimu do travnja 1661. godine, a objelodanjenoj u Amsterdamu 1680. godine, Gradić je: 1. analizirao smisao krajnje posljedice paradoksa i time implicitno kritizirao pojam indivizibila, 2. proučavao karakter uniformne procesije kao ključnog postupka u dokazivanju koje prouzrokuje Galileiev paradoks i postigao napredak u razumijevanju graničnog procesa u odnosu na Galileieva gledišta, 3. istraživao metodu za mjerenje volumena tijela sa zakrivljenom granicom i pritom razvijao ideje koje ga uvrštavaju među idejne preteče topološkog mišljenja u matematici. Dotle je osnovni razlog Boškovićevog proučavanja Galileieva paradoksa u raspravi De natura et usu infinitorum et infinite parvorum (1741) osporavanje pojma indivizibila i Cavalierieve metode indivizibila, budući da je Bošković na početku matematičkog rada 1740.–1741. usvojio Newtonovo tumačenje graničnog procesa, izloženo u Principia (1687) u obliku metode prvih i posljednjih omjera.

Prilikom tiskanja izbora iz svog fizičko–matematičkog rada *Dissertationes physico–mathematicae quatuor* u Amsterdamu 1680. godine Stjepan Gradić je kao treću po redoslijedu objavio raspravu *De loco Galilaei quo punctum lineae aequale pronuntiat (O Galileievom stavku kojim izriče da je točka jednaka crti)*[1]. To je jedina matematička rasprava koju je Gradić objelodanio. Predmet rasprave dosad je dvaput spomenut u sintetičkim prikazima o doprinosu Dubrovčana egzaktnim znanostima. Prvo je M. D. Grmek upozorio da rasprava radi "o jednom Galileievom geometrijskom problemu"[2], a zatim je Ž. Dadić izvjestio kako Gradićeve *Dissertationes* sadrže i raspravu "o jednom matematičkom problemu"[3], i kasnije još pobliže "o određivanju obujma metodom indivizibila"[4]. Tom prilikom Ž. Dadić je glede treće i četvrte rasprave u *Dissertationes* istakao: "do sada nisu istražene pa se o njima ne može izreći nikakav sud"[5]. Stoga na početku istraživanja Gradićeve rasprave *De loco Galilaei* želim jasno istaknuti opće problemsko određenje te rasprave i odrediti pravac istraživanja primjeren istaknutom problemu.

Prvu i nezaobilaznu činjenicu o problemu kojim se rasprava bavi pruža Gradićeva izjava kako je među brojnim Galileievim stajalištima odlučio obraditi upravo Galileievo raspravljanje "o naravi beskonačnosti" *(de infiniti natura)*[6], objelodanjeno u *Discorsi* (1638). Drugo, nastanak i objelodanjenje Gradićeve rasprave prethode pojavi Newtonovih *Principia* (1687), dakle zasnivanju infinitezimalnog računa u obliku metode prvih i posljednjih omjera. Tako Gradićevo razmatranje o naravi beskonačnosti pripada razdoblju koje omeđuju dva temeljna djela prirodoznanstvenog napretka u 17. stoljeću, pa ako ga se hoće vrednovati unutar povijesnog razvoja problema beskonačnosti, onda ga prvenstveno valja vrednovati u odnosu na Galileieva i Newtonova shvaćanja o beskonačnim veličinama i beskonačnim postupcima.

U istraživanju Gradićevog poimanja beskonačnosti ograničit ću se na analizu objelodanjene verzije rasprave *De loco Galiaei.* Posebno ću istražiti kako se povijesni razvoj problema beskonačnosti odražava u logičkoj strukturi i metodičkim opredjeljenjima Gradićevog geometrijskog razmatranja. U mjeri u kojoj to posljednja redakcija Gradićeve rasprave omogućuje osvijetlit ću i genezu Gradićevog poimanja beskonačnosti i činioce rimskog znanstvenog života koji su doprinijeli da se Gradić pozabavi baš tim problemom. Dakako, za cjelovitu gnoseološku i kulturološku obradu neophodno je izvršiti dodatna istraživanja, osobito Gradićevih rukopisa i ulomaka znanstvene korespondencije, te znanstvenog djelovanja Gradićevih suvremenika.

Kritičkom sagledavanju Gradićevih ideja u sklopu povijesnog razvoja problema beskonačnosti doprinosi i Boškovićevo poimanje beskonačno malih veličina, ukoliko je potaknuto istim Galileievim paradoksom i, šire, galileievskim razumijevanjem beskonačnosti. Usporebom Gradićevih i Boškovićevih gledišta moguće je na jednom konkretnom primjeru ustanoviti da li se i koliko gledišta o problemu beskonačnosti prije Newtona razlikuju od istovrsnih gledišta poslije Newtona i objasniti razloge za ustanovljene razlike u shvaćanjima.

Stoga proces vrednovanja Gradićeve matematičke rasprave *De loco Galilaei* uključuje: 1. izlaganje Galileieva paradoksa o jednakosti točke i oboda kruga; 2. Gradićeve prosudbe Galileieva paradoksa i, posredno, beskonačnih veličina i beskonačnih postupaka; 3. Boškovićeve prosudbe Galileieva paradoksa u sklopu osporavanja indivizibila i prihvaćanja infinitezimala.

1. Problemsko određenje i geometrijska konstrukcija Galileieva paradoksa

Paradoks o jednakosti točke i kružnice ne stoji izdvojeno u tekstu prvog dijaloga Galileievog znamenitog djela *Discorsi*[7], nego je uklopljen u britku razmjenu misli između Salviatija i Simplicija o problemu sastavljanja i rastavljanja neprekidnine *(compositio et resolutio continui).* Stajališta sugovornika su oprečna jer oni zastupaju dva međusobno suprotstavljena naslijeđa: platonovsko i aristotelovsko.

Salviati, neoplatonovac po uvjerenju i Galileiev alter ego, predočuje problem rastavljanja neprekidnine *(resolutio continui)* na primjerima geometrijske tvorevine i fizičkog tijela. Prvi primjer je rastavljanje crte koje se može provesti na dva načina. U prvom slučaju crta se rastavlja na količinske dijelove, koji se mogu prebrojiti, to jest ima ih konačno mnogo. Raspoređivanjem dijelova ne može se postići veća protežnina od one koju su ti isti dijelovi zauzimali prije rastavljanja i umetanja praznih prostora između njih. U takvim dijelovima valja prepoznati *dužine.* U drugom slučaju dade se *zamisliti* da je crta rastavljena na dijelove koji se ne odlikuju kvantitetom, naime na beskonačno mnogo *indivizibila.* Tada ju se može zamišljati rasutu u beskraj, uz umetanje beskonačno mnogo praznih indivizibila. Dijelove takvog rastava crte valja smatrati *točkama.* Međutim, postoji bitna razlika između ova dva rastava crte: rastav na dužine je realan, a rastav na indivizibile ili točke je imaginaran. Identično razmišljanje Salviati provodi na primjeru zlatne kuglice.

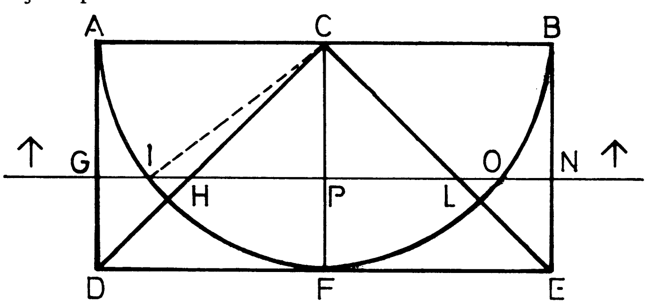
Simplicije, budući da mu je Galilei namijenio da tijekom razgovora posreduje aristotelovsku tradiciju, u Salviatijevom zamišljaju rastava čvrstog tijela na indivizibile odmah prepoznaje Demokritov atomistički pristup. Zatim ističe kao osnovnu poteškoću "sastavljanje crte od točaka, djeljive veličine od nedjeljivih veličina, količine od onoga što nema količinu"[8]. To je klasični aristotelovski prigovor da se dio i cjelina ne smiju opisati ili "definirati" svojstvima koja ih čine nesvodivim jedno na drugo.

Drugi važan aspekt istog problema krije se u pitanju koliko ima dijelova u rastavu neprekidnine. Albert iz Saske (1316–1390) je izgleda prvi izložio aristotelovsku formulu: *continuum non dividitur in infinita, sed in infinitum dividitur.* Ta formula znači: dijeljenjem neprekidnine može se dospjeti do beskonačno mnogo dijelova, pomišljenih u smislu aktualne beskonačnosti, već je dijeljenje moguće uvijek iznova nastavljati u beskonačnost, naravno u smislu potencijalne beskonačnosti. Formula ujedno naglašuje da se istraživanje neprekinutosti i beskonačnosti provodi istovremeno, odnosno riječ je o jedinstvenom problemu neprekinutosti i beskonačnosti. To je povijesna pozadina zbog koje Simplicije broj dijelova kao mjerilo jednakosti geometrijskih veličina ugrađuje u pitanje: u kojem smislu se središte i obod kruga mogu smatrati jednakima, ako je središte samo jedna točka, a obod ih sadrži beskonačno mnogo[9]? Tim Simplicijevim pitanjem najavljen je paradoks.

Salviati se slaže sa Simplicijem da je shvaćanje beskonačnosti otvoreno pitanje i ovako opisuje situaciju matematičara u 17. stoljeću: "Sjetimo se da se nalazimo između beskonačnih i nedjeljivih veličina. Jedne su nedokučive našem konačnom umu zbog veličine, a druge zbog malenosti"[10]. Postoje razne mogućnosti da se istražuje beskonačnost, a ona kojom se Salviati nakanio poslužiti je jedan novi, neobavezni zamišljaj, ujedno i novi izvor zapitanosti o ispravnom razumijevanju beskonačnosti[11].

Prema tom zamišljaju valja promotriti dvije jednake površine, i iznad njih kao osnovicâ promotriti dva jednaka tijela, jednaka po obujmu. Ako se tijela istodobno smanjuju, tako da se proces odvija "neprestano i jednako" *(continuamente ed egualmente),* njihovi ostaci, rezultati takvog smanjivanja, bit će međusobno jednaki i konačno će se, uza sve stalne prethodne jednakosti, dospjeti dotle da od jednog tijela i pripadne mu osnovice preostane samo točka, a od drugog crta *(una lunghissima linea),* dakle beskonačnost. To je osnovna ideja paradoksa[12].

Za eksplikaciju i dokaz maštarije Salviatiju je potreban crtež (sl. 1). Ima crteža koji do te mjere ukazuju na neki otvoreni problem, da ih mnogi učenjaci preuzimaju kad se prihvaćaju tumačenja tog pitanja. Držim da je tako i s ovim Galileievim crtežom koji je bio inspirativan za Stjepana Gradića i Ruđera Boškovića. Crtež, dakle, simbolizira problem, u ovom konkretnom slučaju matematičko–fizički prijepor o ispravnom razumijevanju neprekinutosti i beskonačnosti.



Sl. 1. Galileiev paradoks o jednakosti točke i crte: neprekinuto podizanje ravnine prema vrhu stošca i kratera

Pravokutnik ADEB, polukrug AFB i trokut CDF rotacijom oko osi CF tvore valjak, polukuglu i stožac. Izvadi li se polukugla iz valjka, dobije se krater ili zdjela. Prvo se dokazuje da su krater i stožac po volumenu jednaki. To je očito jer ta dva tijela imaju jednake osnovice i visine, dakle i jednake volumene. Zatim se krater i stožac presijeku ravninom, paralelnom s osnovicom tih tijela i povučenom na ma kojoj udaljenosti *(per qualsivoglia distanza)*. Treba dokazati da ta ravnina odsijeca međusobno jednake dijelove stošca CHL i kratera GAI, BON, a da se to dokaže, dovoljno je dokazati jednakost njihovih osnovica, naime kruga HL i kružnog vijenca GI, ON. Dokaz je proveden u duhu euklidske elementarne metode (tekstualni zapis, Pitagorin poučak, stavak da se površine krugova odnose kao kvadrati njihovih promjera)[13], te u odgovarajućem algebarskom zapisu glasi:

$$IC^2 = IP^2 + PC^2$$

$$AC^2 = IP^2 + PH^2$$

$$GP^2 = IP^2 + PH^2 \;/\cdot 4$$

$$GN^2 = IO^2 + HL^2$$

$$GN^2 - IO^2 = HL^2.$$

Slijedeći korak vodi izravno paradoksalnoj posljedici. Ravnina, sekanta kratera i stošca, podiže se susljedno *(succesivamente)* prema vrhu tih tijela. Za vrijeme tog procesa uvijek vrijedi jednakost presjeka stošca i kratera, odnosno jednakost odrezanih dijelova stošca i kratera. U konačnici treba da i posljednji elementi tog procesa budu jednaki. Naprotiv, na završetku procesa od stošca preostaje samo točka C, a od kratera obod kruga, označen u projekciji s AB. Na osnovu tog procesa, njegovih pretpostavki i posljedica, Salviati se zauzima za jedno novo poimanje jednakosti u geometriji, koje poimanje bi uključivalo i paradoksalnu jednakost točke i crte:

> "Sada dok se dva čvrsta tijela umanjuju do posljednjeg, zadržavajući uvijek međusobnu jednakost, čini se prikladno reći da i najviše i posljednje granice takvih umanjivanja ostaju međusobno jednake, a ne jedna beskonačno mnogo puta veća od druge. Čini se, dakle, da se obod beskrajnog kruga može smatrati jednakim samo jednoj točki. A ovo što se događa s čvrstim tijelima, na isti se način događa i s površinama, osnovicama tih tijela, tako da one, čuvajući uvijek jednakost pri zajedničkom smanjivanju, idu do kraja da postignu, u trenu svog posljednjeg umanjenja, jedna za svoju granicu obod kruga, a druga samo jednu točku. Zašto se te granice ne smiju nazvati jednakima, ako one jesu posljednji ostaci i tragovi dobijeni od jednakih veličina?"[14]

Paradoks je time izložen i u razgovoru Salviatija i Simplicija nastupa trenutak sinteze[15] kad se sugovornici određuju prema problemu sastavljanja neprekidnine *(compositio continui)* kao problemu koji je potaknuo Salviatijevu geometrijsku konstrukciju s paradoksalnom konačnicom. Prema Salviatiju djeljivu veličinu sastavljaju indivizibili, i to baš beskonačno mnogo njih *(ma si bene infiniti)*, a beskonačnost koja se pritom očituje je aktualna beskonačnost. Pa kao što se beskonačnost i indivizibil istovremeno opisuju kao pojmovi koji su po sebi *(per se solo)* neiscrpivi ljudskim umovanjem, tako se po ovom neoplatonovskom shvaćanju beskonačnost i indivizibil *istovremeno* prihvaćaju kao aktualno egzistentni: beskonačnost *(l'infinito)* kao aktualna beskonačno velika vrijednost, izražena brojem, a indivizibil *(l'indivisibile)* kao aktualna beskonačno mala vrijednost, izražena po veličini. Naprotiv, Simplicije izražava sumnju da li se beskonačnost tu shvaća na pravi način. Što se događa kad nađemo da je jedna crta veća od druge? Ako svaka sadrži beskonačno mnogo točaka manje crte? Dobija li se tako beskonačnost veća od same beskonačnosti? Tako Simplicije svojim prethodno iznijetim razlozima protiv indivizibila dodaje i problem *transfinitnosti.*

Paradoks, dakle, ne doprinosi da se približe stajališta sugovornika u Galileievom dijalogu. Dapače, naglašena razlika između neoplatonovskog i peripatetičkog stajališta predstavlja otvoren poziv na daljnje matematičko istraživanje neprekinutosti i beskonačnosti.

2. Gradićeve prosudbe Galileieva paradoksa

2.1. Okolnosti nastanka Gradićeve rasprave

Stjepan Gradić ubraja se među one učenjake koji su pokušali odgovoriti na pitanja koja pokreće Galileiev paradoks. Početak i kraj geometrijskog razmatranja *De loco Galilaei* svjedoče da je Gradić bio vrlo dobro obaviješten što znači istraživati u matematici poslije Galileia. U razdoblju Gradićevog intenzivnog istraživanja u egzaktnim znanostima (1656–1660) Galileieve ideje oživotvoruju se u znanstvenom djelovanju Galileievih neposrednih učenika, a prvenstveno u krugu čuvene firentinske *Accademia del Cimento,* jedinstvene prirodoznanstvene akademije koja je u svom kratkotrajnom vijeku (1657–1666) pod geslom *provando e riprovando* njegovala eksperimentalni pristup u primijenjenoj matematici, fizici, astronomiji i fiziologiji. Tom krugu redom pripadaju učenjaci s kojima je Gradić izmjenjivao misli u matematičko–fizičkim pitanjima: Vincenzo Viviani, Giovanni Alfonso Borelli, Michelangelo Ricci, Honore Fabri, Ottavio Falconieri i Lorenzo Magalotti. Dio njih djeluje u književno–znanstvenom krugu oko švedske kraljice Kristine, a tu im je Gradić izravni sugovornik. To znači da se Gradić kreće u znanstvenoj sredini u kojoj je Galileiev ugled presudan, a Galileieva rješenja slove kao mjera egzaktnosti. Gradićevim riječima: "Ugled znamenita čovjeka u tolikoj je mjeri postignut presjajnim izdanim djelima, uvjerenje o posebnoj njegovoj zasluzi u tolikoj je mjeri utvrđeno u mislima učenih ljudi, te, kao što je Aristarh poricao da je stih Homerov ako to nije sâm dokazao, a Ciceron nije dopuštao da se smatra njegovim što nije rječito, tako odvažno valja reći da ono, što na vazi savršena uma nije egzaktno, ne može ni na koji način biti Galileievo"[16].

Unatoč nespornom Galileievom autoritetu Gradić uviđa da u Galileievom djelu postoje mjesta koja tek upućuju na otvorene, neriješene probleme, pa stoga "zahtijevaju mudra i iskusna čitatelja" i "navode učene ljude da međusobno raspravljaju"[17]. A postoje i učeni ljudi koji su se usudili peckati Galileia nepranim jezikom i prekoravati ga zbog greške i očitog paralogizma. Gradić priznaje da je s takvima posebno raspravljao o Galileievom paradoksu o jednakosti točke i oboda kruga[18]. Premda ih ne imenuje, njihova imena valja potražiti među rimskim akademicima iz kruga kraljice Kristine.

Jedno ime Gradić ipak izdvaja: Octavius. On je adresat Gradićeve rasprave. Obraća mu se u više navrata: *Octavi doctissime, mi Octavi*[19]. Taj vrlo učeni Octavius, blizak Gradiću, očito podrijetlom Firentinac jer je pozvan na sjajnu svečanost kraljevskih zaruka u Firenzi, je nedovoljno poznati Ottavio Falconieri, koji je i u najopsežnijim leksikonima označen kao vrstan znalac grčke i rimske starine, ali ne i kao matematičar[20]. Zasad, prije nego se izvrše dodatna istraživanja, ne može se ništa ustvrditi o Falconierijevom matematičkom radu, ali su nam zato Gradićeva obraćanja Falconieriju osobito važna jer otkrivaju čitav niz pojedinosti o nastanku rasprave *De loco Galilaei.*

Kako je i kad nastala Gradićeva rasprava *De loco Galilaei?* Gradić je najprije odlučio obraditi "najteže mjesto" u Galileievim *Discorsi*, "gdje ima ono izvrsno raspravljanje o naravi beskonačnosti", a "koje pobuđuje oštroumnu i dosjetljivu raspravu o razlici između konačnosti i beskonačnosti"[21]. Ovaj osobiti Galileiev poučak potanko je raspravljao s Ottavijem Falconierijem i Julijem Montevecchio u Falconierijevom radnom kabinetu *(in tuo museo)*[22], a potom i s neimenovanim drugim znanstvenicima koji su sačuvali galileievsku otvorenost i kritičnost i pred Galileievim tekstom[23]. Konačno, napisao je raspravu u obliku pisma upravljenog Falconieriju kako bi on mogao porazgovarati o istoj stvari "s Lorenzom Magalottijem, izvrsnim i učenim mladićem"[24]. Falconieri se, naime, sprema na put u Firenzu *(in hoc tuo Florentino itinere)* da sudjeluje u svečanostima povodom kraljevskih zaruka, pa Gradić očekuje da mu odatle štogod napiše o obje sentencije *(de utriusque sententia)*, to jest o neoplatonovskoj i peripatetičkoj sentenciji u pogledu neprekinutosti i beskonačnosti[25]. Gradić, dakle, očekuje mišljenje o svom razumijevanju beskonačnih veličina i beskonačnih postupaka iz samog žarišta firentinske znanstvene sredine, jer je predviđeni Falconierijev sugovornik u Firenzi upravo Lorenzo Magalotti (1637–1712), mladi, poduzetni tajnik tamošnje akademije *Del Cimento*, imenovan 1660. godine na tu dužnost na prijedlog Vincenza Vivianija, i sâm Vivianijev učenik, osobito zaslužan jer je u djelu *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento* (1666) prikazao doprinos Akademije egzaktnim znanostima i tako omogućio evropsku recepciju firentinskih shvaćanja i dostignuća[26].

Po tim podacima proces nastanka rasprave nije trajao odveć dugo, jer je Gradić početak proučavanja Galileieva paradoksa označio s "nedavno" *(nuper)*[27]. Taj se vremenski odsječak može ograničiti datumom vjenčanja princeze Marguerite Louise, kćeri vojvode od Orelansa, i toskanskog kneza Cosima de'Medici, kasnijeg Cosima III, 19. travnja 1661. u Parizu[28]. Gradić je svakako prije tog vjenčanja dovršio tekst rasprave, te ga je Falconieri mogao ponijeti sa sobom kad je krenuo u Firenzu na doček mladenaca. Gradićeva rasprava je, dakle, nastala do travnja 1661. godine, objelodanjena je u Amsterdamu tek 1680. godine, a u njenoj genezi možda su određenu, još neistraženu ulogu odigrali Gradićevi dodiri s firentinskom akademijom *Del Cimento*, pa je potrebno temeljito istražiti te dodire.

Odnos Galileieva autoriteta i galileievske kritičnosti u rimskoj znanstvenoj sredini, te konkretne okolnosti koje su utjecale na Gradićevo istraživanje Galileieva paradoksa, osnovne su teme na početku i na kraju rasprave *De loco Galilaei.* U glavnom dijelu te rasprave Gradić, dakako, obrazlaže ideje i postupke koje susreće u Galileievoj analizi beskonačnosti. Ta Gradićeva obrazloženja redom se odnose na: smisao krajnje posljedice paradoksa, postupak uniformne procesije i metodu za mjerenje površina i volumena sa zakrivljenim granicama, pa ću ih tim redom izložiti i vrednovati.

2.2. Smisao krajnje posljedice paradoksa

Prva Gradićeva primjedba odnosi se na izbor dijaloga kao prikladnog oblika za raspravljanje otvorenih matematičko–fizičkih pitanja. Gradiću je jasno: Galilei koristi *slobodu* svojstvenu dijalogiziranju kako bi naprosto razvio svoja shvaćanja, ali pritom nije spreman boriti se za istinitost u svom paradoksu, pogotovo nije spreman boriti se u smislu *pro agris et focis*[29]. Razgovorni oblik je pogodan da se iznesu različite sentencije koje ne vode istom zaključku. Takva forma dopušta sugovorniku da ne obdržava stalno strogost u filozofskom ili matematičkom zaključivanju. Razgovor podrazumijeva slobodu dosjetke i pojavu čuđenja. Time što izražava prijateljske razgovore učenih ljudi dijalog se po Gradiću približava naravi pjesništva[30].

Izabravši dijalog kao način izlaganja prirodoznanstvenih pitanja Galilei, dakle, može "igrati istu igru koju je nekoć u svojim uputama o poljodjelstvu igrao Heziod, gdje kaže:

Lude, ne znaju koliko
dodano polovici daje cijelo"[31].

U čemu se očituje srodnost Galileieve slobode izražavanja i Heziodove stihovane igre? Heziodov stih je valjda najraniji grčki tekst o diobi, a upravljen je podmitljivim sucima koji su u ostavinskoj raspravi između Hezioda i njegova brata Perza lavovsku polovicu dodijelili Perzu. Ishod diobe trebao je biti jasan: svakom sinu polovica, ali je zbog podmićenih sudaca postupak dijeljenja postao sporan. Analogno se događa u Galileievu dijalogu. Postupak koji vodi ishodu biva sporan, a sam ishod, jednakost točke i crte, ničim se ne da braniti.

Gradić i započinje obrazlaganje Galileieva paradoksa izjavom da je tvrdnja o jednakosti točke i crte posve udaljena od istine[32]. A neistinitost tvrdnje još se naglašenije očituje ako se prouče posljedice takve tvrdnje. Kad bi bilo tako da je točka jednaka crti, na isti način bi i crta bila jednaka površini, a površina jednaka tijelu. Tvrditi jednakost točke i crte znači u krajnjoj posljedici tvrditi da je bezdimenzionalna točka jednaka trodimenzionalnom kvantitetu, prema tome i protusloviti smislu Euklidove definicije točke[33]. U nastojanju da dopre do krajnje posljedice Galileieva paradoksa Gradić u isti mah interpretira baš tu definiciju, a to postiže tako što protuslovnost tvrdnje o jednakosti točke i tijela naglašava uporabom pojma mjere ili dimenzije[34]. Gradićev izraz za točku je *stvar nijedne mjere (res nullius mensurae)*, a za tijelo *trostruko mjerena veličina (quantitas trina dimensa)*.

Time Gradić odustaje od uobičajenog latinskog prijevoda Euklidove definicije točke, koji prijevod u osnovi ima pojam dijela:

Punctum est, cuius pars nulla est;

te kao vrstan znalac grčkog jezika i geometrije *tó méros* razumijeva kao mjeru, odnosno dimenziju. Premda to shvaćanje, naravno, ne uključuje suvremene matematičke sadržaje tih pojmova, nezaobilazna je činjenica da Gradić u razdoblju punog zamaha metode indivizibila smatra kako je preciznije reći da je točka bezdimenzionalna ili nemjerljiva, nego da je nedjeljiva. Drukčije rečeno, za Gradića je prikladnije reći da točku ne definira postupak mjerenja, nego to isto ustvrditi za postupak dijeljenja. A to je u klici osporavanje indivizibila.

2.3. Istraživanje karaktera uniformne procesije

Prema Gradićevu shvaćanju ključni postupak u Galileievom dokazivanju jednakosti točke i crte predstavlja *uniformis processio* kao postupak koji se provodi za osnovice stošca i kratera. Osobiti latinski naziv tog postupka ima dva osnovna značenja: 1. jednoliko napredovanje, jednoliki prolazak; 2. jednoliko iščezavanje, nestajanje, uminuće. Po mom sudu Gradić izborom takvog stručnog naziva sretno objedinjuje oba aspekta postupka kojeg opisuje: 1. neprestano povećavanje promatranih elemenata, odnosno napredovanje u pogledu broja elemenata, ako ih se promatra u ukupnosti; 2. ravnomjerno iščezavanje elemenata, kad se takav elemenat promatra pojedinačno. Stoga ću u daljnjem tekstu taj postupak redovito nazivati *uniformnom procesijom*, kako bih očuvao i podsjećao na bogatstvo smisla koje sadrži specifični Gradićev terminološki izbor.

Uniformnu procesiju likova koji tvore osnovice stošca i kratera Gradić karakterizira pomoću geometrijske jednakosti, i to ovako: "ako se (tijela) presijeku ma kojom ravninom GL koja je usporedna osnovici stošca, površina kruga HL koja se oduzima od stošca uvijek je jednaka odgovarajućoj površini koluta GION koju površinu Galileo naziva vrpsom ili vijencem"[35]. A to znači da on promatra jednakost površina u sklopu uniformne procesije geometrijskih tvorevina, te mu zato izgleda opravdanim za takvu jednakost tvrditi da je "jednakost koja uvijek prati procesiju" *(aequalitas semper comitans processionem)*[36]. Dakle, u Gradićevu viđenju jednakost geometrijskih likova i tijela ne ostvaruje se tek kao puki identitet, nego se pojavljuje kao dinamički shvaćena jednakost, slučena s postupkom uniformne procesije. Kako Gradić nigdje u raspravi ne dovodi u pitanje dokaz jednakosti kruga i kružnog vijenca kojeg je Galilei izveo elementarnom geometrijskom metodom, već svu svoju pažnju usredotočuje na uniformnu procesiju, on očito pretpostavlja da se upravo u postupku uniformne procesije krije razlog što na kraju tog postupka iskrsava paradoks. Stoga nastoji pratiti i istražiti taj postupak.

Prvi Gradićev zaključak je trivijalan, ali uklapa pojam uniformne procesije u neposrednu geometrijsku posljedicu jednakosti osnovica: uniformna procesija ne pridružuje se samo jednakosti presjeka stošca i kratera, izvedenih istom ravninom usporednom osnovici stošca, nego odatle slijedi kako je ona postupak unutar kojeg se ostvaruje i jednakost među tijelima koja nastaju odsijecanjem stošca i kratera istom ravninom. Gradić kaže da se tu ponavlja "ista jednakost" *(eademque aequalitas)*[37], te tako podsjeća na karakter te geometrijske jednakosti.

Drugi zaključak odnosi se na *granice (termini)* jednakih površina, a to je već tema koju je potaknuo Galilei. Što se može reći o granicama tih površina? One nisu jednake tijekom procesije, pa je logično očekivati da neće biti jednake ni na kraju tog postupka. Gradić izričito kaže da iz jednakosti površina ne slijedi nužno jednakost granica jednakih površina, kao ni jednakost granica jednakih volumena[38], te se radi kratkoće izlaganja ograničava na razmatranje o granicama površina.

Gradić kao da se najprije pita postoji li mogućnost da se odnos površina i njihovih granica izrazi *preko dimenzije*, jer odmah primjećuje da nema geometrijskih pravila kojim bi se uredovale dimenzije površina *(Geometriae praecepta ad dimensiones planorum administrandas)*[39], a prema kojima bi se dalo zaključiti od jednakosti granica na jednakost kvantiteta koji su ograničeni tim granicama. Zatim kao da se pita da li uniformna procesija omogućuje kakav manje općenit zaključak, pa se pogodbeno izražava: ako bi se iz jednakosti kvantiteta koji uniformno procediraju i moglo zaključiti na jednakost granica, i to jednakost pomoću koje se baš i definira takva procesija, to još uvijek ne bi značilo jednakost točke i oboda kruga. Razlog tome Gradić pronalazi u činjenici da granice u Galileievoj geometrijskoj konstrukciji imaju višestruku ulogu40. Točka i kružnica nisu samo granice kratera i stošca koji se u njima završavaju, već isto tako i granice onih površina od kojih se krater i stožac sastoje, konkretno granice kruga i kružnog vijenca, a one zacijelo nisu međusobno jednake. Razlika u veličini *(magnitudinis discrepantia)* očita je samim tim što je granica kruga jedinstvena kružnica, a granicu vijenca čine dvije kružnice. Taj se nesklad još više izražava napredovanjem procesije *(in progressu processionis)* jer se granica kruga smanjenjem površine kruga i sama smanjuje, dok se granica kružnog vijenca smanjenjem površine vijenca naprotiv povećava, te se i ovom prilikom pokazuje da Gradić i onda kad obrazlaže nejednakost geometrijskih veličina vodi računa o postuliranoj povezanosti geometrijske jednakosti i uniformne procesije. Nejednakost granica potencira se do apsurda ako se uoči da na početku procesije osnovice stošca i kratera imaju kao zajedničku granicu kružnicu DE. Ta tvrdnja dakako vrijedi uz pretpostavku da je opravdano zanemariti točku F koja je također granica osnovice kratera, a to i jest opravdano jer točka kao bezdimenzionalna tvorevina ne može doprinijeti veličini granice.

Gradićevi zaključci o granicama geometrijskih tvorevina smjeraju na jedan širi kontekst unutar kojeg je smisleno postavljati nova, općenitija pitanja: pod kojim je uvjetima za neko geometrijsko svojstvo dozvoljeno zaključivati od površina na tijela, a pod kojim uvjetima od površina na crte? Što se smije zaključiti o geometrijskom objektu kojemu je dimenzija za 1 veća ili manja od dimenzije promatranog objekta? Ta pitanja nisu izrijekom postavljena, ali ona izviru iz strukture Gradićevog razmatranja.

Što se, međutim, zbiva na kraju uniformne procesije? Po Gradićevu shvaćanju napredovanje kakvo postoji u uniformnoj procesiji vodi do *apsolutnog napretka*, odnosno do stanja koje on označuje *postquam absoluto progressu*[41]. To se stanje iskazuje tako što se granica kruga steže na najmanju moguću veličinu, na točku ili po Gradićevim riječima na ništa, a granica kružnog vijenca proširuje na najveću moguću veličinu. To znači da granice po veličini poprimaju *krajnje* vrijednosti, pa samo utoliko ima smisla Gradićev izričaj da granice postižu *jednake* učinke.

Koji se matematički smisao krije iza ovog fenomenološkog opisa apsolutnog napretka? Odgovor valja potražiti u usporedbi sa sličnim izrazom u Gradićevoj raspravi *De causa naturali motus accelerati. Apsolutni* napredak iz rasprave *De loco Galilaei* je izraz za ishod približavanja točki u prikazu Galileieva paradoksa, kao što je *apsolutni* i k tome savršeni trokut iz rasprave *De causa naturali motus accelerati* izraz za ishod graničnog procesa prilikom dokazivanja da je put prijeđen jednoliko ubrzanim gibanjem po brojnoj vrijednosti jednak površini Galileieva trokuta[42]. U oba slučaja radi se o stezanju dužine na točku kao obliku odvijanja graničnog procesa. U raspravi *De loco Galilaei* stezanje kružnice na točku promatrano u projekciji predstavlja stezanje dužine HL na točku C, a u raspravi *De causa naturali motus accelerati* prvo se promatra Galileiev trokut, naime pravokutni trokut kojem jedna kateta predstavlja protekli vremenski razmak, a druga brzinu postignutu na kraju tog vremenskog razmaka, zatim se uočava da izborom vremenskih razmaka nastaje zupčasti lik, to bliži trokutu što su vremenski razmaci uži, pa se konačno formulira granični prijelaz: "pretpostavivši da je takva podjela razlučena na beskonačno mnogo razmaka i dosljedno pretpostavivši da je ona prva brzina manja od svih mogućih i svedena na točku kojom se izražava prvi čas gibanja, to jest mirovanje samo, kojim započinje dano gibanje,..."[43]. Po izvršenim istraživanjima ne može se tvrditi, ali je opravdano pretpostavljati da je stezanje dužine na točku bio mogući izvor Gradićevog interesa za Galileiev paradoks, interesa kojim je htio produbiti svoje razumijevanje graničnog procesa. Ali je sigurno, na temelju uporabe pojma *apsolutnog,* da Gradić u oba navrata procesu stezanja dužine na točku pridaje isti karakter: približavanje granici. A to je vrijedan rezultat 1661. godine, jer je nastao u razdoblju poslije Galileia koji zbog aktualnog shvaćanja beskonačnosti uopće nije nastojao matematički precizirati granični proces, a prije Newtona koji je prvi težnju prema granici uobličio u matematičku metodu, nazvavši je metodom prvih i posljednjih omjera[44].

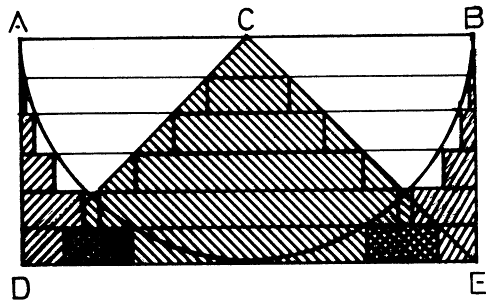
2.4. Istraživanje arhimedovske metode za određivanje obujma tijela sa zakrivljenom granicom

Objašnjavajući paradoks Galilei je naznačio kako je moguć i drukčiji pristup prilikom utvrđivanja jednakosti volumena kratera i stošca, a to je način dokazivanja koji je Luca Valerio primijenio u raspravi *De centro gravitatis solidorum (O težištu tjelesa)* (1604). Metoda premjeravanja površina i volumena sa zakrivljenim granicama, koju je koristio Valerio, temelji se na atomističkim predodžbama geometrijskog prostora i vuče podrijetlo od Demokritova problema: "ako se stožac presiječe plohama paralelnim s njegovom bazom, kako valja zamišljati površine presjeka: jednakim ili nejednakim?"[45] Demokrit je, kako svjedoči sačuvani fragment, odmah uočio da ukupnost svih presjeka u slučaju nejednakih površina daje nepravilno tijelo s mnogim stepeničastim izbočinama, a u slučaju jednakih površina daje valjak, a ovaj drugi slučaj očito je potpuno besmislen. Time je prvi problematizirao ulogu prostorne stepeničaste tvorbe za mjerenje volumena, omeđenog zakrivljenom plohom. Te početne predodžbe ugradio je Arhimed u svoja plodna mehanička, odnosno statička rasuđivanja kojima je rješavao problem kvadrature zakrivljenih površina, posebice parabole, kao i problem kubature odnosnih tijela, a da im je istodobno odricao geometrijsku strogost, koju je pridržao samo metodi ekshaustije. S prijevodima i komentarima Arhimedovih glavnih spisa Zapad se upoznao tek tijekom druge polovice 16. stoljeća, a u oživljavanju i posuvremenjenju Arhimedovog djela istakao se baš Luca Valerio, pa ga Galilei opravdano naziva "nuovo Archimede dell'eta nostra"[46]. U svom čuvenom djelu *De centro gravitatis solidorum* on je na temelju Arhimedovog primjera za parabolični konoid sustavno istraživao sve sferoide i konoide i njihove odsječke nastale presjekom ravnine okomite na os, a pritom se služio opisanim i upisanim stepeničastim likovima, sastavljenim od vrlo mnogo jednako širokih pravokutnika.

Prilikom izlaganja paradoksa Galilei se izričito poziva na Valerijev dokaz jednakosti kratera i stošca koji uključuje poimanje integracije u rudimentarnom atomističkom smislu. Slijedeći Galileia taj dokaz spominje i Gradić[47], ali za razliku od Galileia on ga iscrpno komentira i ispituje tragajući za izvorom paradoksa. Evo najprije osnovne ideje Valerijeva dokaza u Gradićevoj interpretaciji:

> "A znameniti onaj pisac ondje (Luca Valerio u svojoj raspravi *De centro gravitatis solidorum)* dokazuje jednakost kratera i stošca odatle što se u odnosu na osnovicu valjka ekvidistantnim ravninama razdijeli stožac na *više* valjaka, a krater na *isto toliko* valjkastih okruga (nazivam valjkastim okrugom ono tijelo koje preostane od većeg valjka ako se od njega oduzme manji valjak iste osi), tako da *svakom pojedinom* valjku, sastavnici stošca, *odgovara* valjkasti okrug iste veličine. A upravo se iz jednakosti *pojedinih* dijelova postiže jednakost *svih* dijelova, pa tako iz jednakosti valjaka i valjkastih okruga i jednakost kratera i stošca kakva je među elementima. Iako se već spomenutim presjecima ustanovljeni valjci redaju s jedne, a valjkasti okruzi s druge strane, niti *svi* ti valjci izgrađuju *cijeli* stožac, niti *svi* okruzi *cijelu* zdjelu, jer iz takvih *združenih* valjaka, odnosno valjkasnih okruga, ne nastaje kad je riječ o stošcu *potpuno* konusna površina, a kad je riječ o krateru *savršeno,* da tako kažem, kraterasta površina, nego ulaganjem dotičnih komadića na obje strane te površine postaju *na neki način nazubljene.* A isto je tako i kad se takvi komadi nipošto ne bi našli, ako baš onakva jednakost pojedinih valjaka i okruga *uvijek procedira.* Ako bi takvo umnažanje presjeka *poraslo na ma koji broj,* slijedilo bi ono što nužno mora slijediti: *toliko* umanjivanje pojedinih onakvih komada, da svi istodobno uzeti postižu veličinu *manju od ma kojeg danog kvantiteta.* Uslijed ovog razloga ne može se nikad dogoditi da onaj nazubljeni lik sastavljen od *ma koliko* valjakstih okruga, primiče li se na *ma koju približnost* krateru, ne bude jednak drugom, isto tako nazubljenom liku, sastavljenom od *isto* toliko valjaka, a koji se lik *s jednakom približnošću* približava jednakosti sa stošcem"[48].

Prvi dio dokaza razmatra slučaj razdiobe stošca i kratera sa zajedničkom osnovicom na konačno mnogo dijelova (sl. 2). Stožac i krater razdijele se ekvidistantnim ravninama, paralelnim zajedničkoj osnovici, jedan na valjke, a drugi na valjkaste okruge. Količinski izrazi, kakvi su *više* valjaka i *isto toliko* valjkastih okruga, znače da presijecanjem nastaje *konačno mnogo* dijelova. *Isti* broj dijelova izražava se dodatno pojmom obostrane korespondencije valjaka i valjkastih okruga. Ti dijelovi imaju jednake osnovice i jednake visine, što je osigurano konstrukcijom, pa imaju i jednake volumene. U skladu s drugim Euklidovim aksiomom o jednakosti veličina, kojeg navodim kasnije u tekstu, zbrojevi konačno mnogo jednakih volumena su međusobno jednaki. Ali tako dobiveni volumeni nisu ujedno volumeni kratera i stošca, već su nazubljeni volumeni, odnosno njihove plohe nisu potpune i savršene, a takva tvrdnja se podrazumijeva ako se zna kako i kad po Gradićevom mišljenju površine postaju potpune i savršene: pošto se dovrši proces približavanja granici.



Sl. 2. Valerijev dokaz jednakosti volumena stošca i kratera: mjerenje volumena pomoću upisanih nazubljenih tijela

Kako se odvija prijelaz od konačno mnogo na beskonačno mnogo dijelova stošca i kratera?

1. Broj presjeka raste prema *ma kojem* broju, odnosno teži da postane beskonačno velik. Time nastaje *ma koliko* valjkastih okruga i isto toliko valjaka, što su količinski izrazi koji također označuju napredovanje u beskonačnost u potencijalnom smislu. Pritom se ne dovodi u pitanje očuvanje jednakosti nazubljenih volumena, dapače jednakost volumena biva sačuvana i na granici.

2. Valjci i valjkasti okruzi, sastavnice stošca i kratera, promatrani pojedinačno umanjuju se *toliko* koliko se povećava broj presjeka, dakle postaju po volji maleni.

3. Zbroj beskonačno mnogo takvih odrezaka manji je od *ma kojeg danog* kvantiteta. Time kao da je rečeno: ako se broj dijelova povećava u beskonačnost, zbroj takvih i tolikih dijelova svejedno nije beskonačna, već naprotiv konačna veličina. U zbroju su svi dijelovi, njih beskonačno mnogo, istodobno uzeti, to jest zbroj beskonačnog reda shvaćen je *aktualno*.

4. Razlika između volumena tako nastalog nazubljenog tijela i bilo kojeg od volumena početno danih tijela, kratera ili stošca svejedno, postaje *ma koja,* dakle po volji malena. Ta se razlika shvaća kao *aktualno* beskonačno mala veličina, jer se nazubljenost volumena u Gradićevoj interpretaciji Valerijevog dokaza ne ukida ni na granici. Pritom se jednakost volumena izražava na još jedan prikladan način. Aproksimacije *(proximitates),* koje se promatraju istodobno u odnosu na stožac i krater, tijekom procesa ostaju uvijek međusobno jednake.

Poslije izlaganja Valerijeva dokaza Gradić pristupa prosudbi tog dokaza. Dakako, i on poput Salviatija u Galileievom prvom dijalogu stalno naglašava kako se tijekom procesa približavanja granici uvijek održava uočena geometrijska jednakost. Jasno je i zašto: jednakost tijekom graničnog procesa povlačila bi jednakost na granicama, jednakost točke i oboda kruga. Gradić, međutim, osporava Salviatijevo poimanje jednakosti sadržano u upitu: zašto se te granice ne smiju nazvati jednakima[49]? Razliku što postoji među granicama stošca i kratera valja uvažiti kao očiglednu, pa Gradić zato istražuje *odnos granice i objekta kojeg ona ograničuje* kao mogući izvor Galileievog paradoksa. Pritom postavlja dvije međusobno protivne pretpostavke i služi se Euklidovim aksiomima o jednakosti i nejednakosti veličina:

(A2) Ako se jednako dodaje jednakom, cjeline su jednake.

(A3) Ako se jednako oduzima od jednakog, ostaci su jednaki.

(A4) Ako se jednako dodaje nejednakom, cjeline su nejednake[50].

Uporaba ovih Euklidovih aksioma upućuje na Euklidovo poimanje jednakosti veličina kao na jedino neprijeporno poimanje jednakosti geometrijskih veličina.

Prva pretpostavka: točka i obod kruga *jesu* sastavni dijelovi kratera i stošca[51]. Slijedi da ih valja pribrojiti zbrojevima beskonačno mnogo međusobno jednakih odrezaka stošca i kratera. Za te je zbrojeve konstrukcijom osigurano da su međusobno jednaki: prvo je utvrđeno da su zbrojevi konačno mnogo odrezaka stošca i kratera međusobno jednaki, zatim da se jednakost zbrojeva održava u procesu povećavanja pribrojnika na ma koji broj. S druge strane, točka i obod kruga nisu međusobno jednaki. U koraku kojim se dosiže granica tijela, na stošcu točka a na krateru obod kruga, dakle u koraku kojim se stožac i krater po Gradićevim riječima *potpuno sklapaju ili spajaju,* događa se da se dvama jednakim kvantitetima dodaju dva nejednaka, pa su ti zbrojevi, prema četvrtom Euklidovom aksiomu o nejednakosti veličina, nejednaki. Gradić ublažuje zaključak: jednakost stošca i kratera je bar dvojbena ili nije istaknut argument koji bi uzrokovao da se definitivno odustane od dokazivanja tvrdnje o jednakosti stošca i kratera.

Druga pretpostavka: točka i obog kruga *nisu* sastavni dijelovi stošca i kratera[52]. U tom slučaju Gradić promatra zbrojeve odrezaka stošca i kratera kao međusobno jednake *dijelove,* oduzete na obje strane od *cjelina* stošca i kratera. Oduzimanjem dijelova od cjeline dobijaju se *ostaci (residui).* Ostatak je, po svemu sudeći, nov naziv za granicu koja nije sastavni dio geometrijske tvorevine koju ograničuje. Uvođenjem kategorije cjeline, dijela i ostatka polazni geometrijski problem priređen je za primjenu trećeg Euklidovog aksioma o jednakosti veličina. Ali Gradić tvrdi baš suprotno, i to zbog toga što uočava problem u verifikaciji trećeg Euklidovog aksioma: "Naime, za verifikaciju aksioma o jednakosti ostatka iz jednakosti oduzetih dijelova od jednakih cjelina nužno je da se dotične jednake cjeline koje se međusobno uspoređuju sastoje od svakog svog oduzetog dijela i ostatka kao od dijelova koji te cjeline iznova uspostavljaju"[53]. Navedeni Gradićev zaključak zavređuje temeljit komentar.

1. On je značajan u metodološkom pogledu. Njime se, naime, zahtijeva *verifikacija* sasvim određenog, trećeg Euklidovog aksioma u jednoj konkretnoj geometrijskoj situaciji. Stoga je opravdano pitati odakle potječe i kamo smjera zahtjev za preispitivanjem dedukcije koju sadrži treći aksiom. Očigledno, zahtjev se temelji na činjenici da prva premisa, to jest jednakost cjelina od kojih tek treba oduzimati dijelove, nipošto nije dokazana, naprotiv, ona je nešto što tek treba dokazati. A bez dokazano istinitih premisa aksiom je prazna forma, dedukcija koja nije i dokaz.

2. Gradićev zahtjev za verifikacijom već samim sadržajem inzistira na logičkoj vezi između drugog i trećeg Euklidovog aksioma, time i na zbrajanju kao postupku koji je inverzan oduzimanju. A valja podsjetiti da se problem mjerenja geometrijske tvorevine prepoznaje u sklopu aristotelovskog naslijeđa uvijek kao *problem kontinuuma*, iskazan ravnopravno u dvama pristupima: sastavljanju *(compositio continui)* i rastavljanju *(resolutio continui)*. Povijesni razlozi, premda sigurno prisutni, nisu presudni. Odlučna je Gradićeva spoznaja da u promatranom pitanju oduzimanje nije konačan proces, pa valja voditi računa o svakom oduzetom dijelu, o svim oduzetim dijelovima, a njih je po konstrukciji i prijelazu na ma koji broj beskonačno mnogo. Promatrano iz perspektive drugog aksioma, koji sadrži logičku dedukciju inverznu onoj u trećem aksiomu, to znači da ni zbrajanje u promatranom slučaju nije konačni proces, što vodi zahtjevu da se utvrdi zbroj beskonačnog reda. A Gradić upravo iz poteškoće kako da shvati taj zbroj i njegov odnos prema granici i postavlja dvije protivne pretpostavke: granice jesu ili nisu sastavni dijelovi tijela kojeg ograničuju. Dakle, Gradićev zahtjev za verifikacijom aksioma još jednom aktualizira razmatranje zbroja beskonačnog reda.

Prema prethodnom razglabanju Gradić bi uviđao da je izreka aksioma *logička dedukcija*, koju je smisleno upotrijebiti u *geometrijskom dokazu* samo: 1. ako je već prethodno dokazano da su *premise istinite*, 2. ako je *matematički strogo definiran pojam operacije* koju izreka aksioma implicira, a to je u trećem aksiomu, a primjereno proučavanom pitanju, pojam oduzimanja beskonačno mnogo dijelova.

3. Gradićev zaključak govori o ponovnom uspostavljanju cjelina koje su prethodile oduzimanju. Takva rekonstrukcija je nemoguća zbog polazne pretpostavke da granice nisu sastavni dijelovi tijela. Logički gledano, nema smisla u ponovnu izgradnju cjeline uključiti nešto što je po polaznoj pretpostavci odvojeno od te cjeline. Tako se u postupku verifikacije dolazi do *logičke kontradikcije* s polaznom pretpostavkom.

4. Svoj jezgroviti zaključak Gradić potkrepljuje isključivo slikovitim primjerom iz pomorskog života. Riječ je o iznimno uspješnoj usporedbi: "inače, ako bi se štogod oduzelo usred žita iz neke troveslarke i ako bi se ista količina oduzela iz nekog malog čamca, moglo bi se zaključiti da je čamac jednak troveslarki"[54]. Plovilo natovareno teretom žita plastično predočuje polaznu pretpostavku o granici koja ne pripada objektu kojeg ograničuje. Ograde skladišnog prostora na čamcu i troveslarki sigurno nisu napravljene od žita. Prema "naivnom" poimanju, preuzetom iz svakodnevnog života, u teretima na čamcu i troveslarki ima beskonačno mnogo zrna. Iskrcaj žitnog zrnja iz oba plovila moguće je izvesti na isti način pomoću uređaja koji u svakom koraku zahvati istu, vrlo malu količinu zrnja, dapače, moguće ga je izvesti u dovoljno velikom broju koraka da bi se netko tko bi pokušao ustanoviti točan broj koraka mogao zabuniti u brojenju. Svejedno, brojitelj bi s pravom mogao tvrditi da je poslije svakog koraka iskrcana ista količina zrnja. Ali to ne jamči da su čamac i troveslarka plovila s jednako velikim skladišnim prostorom.

Gradićevo istraživanje odnosa geometrijske tvorevine i njene granice, izvedeno u okvirima geometrijske konstrukcije Galileieva paradoksa, opovrgava obje polazne pretpostavke. Točka i obod kruga niti jesu, niti nisu sastavni dijelovi kratera i stošca. Odatle slijedi da je protivno Gradićevim očekivanjima odnos geometrijske tvorevine i njene granice *neodlučiv* u pogledu utvrđivanja izvora Galileieva paradoksa.

Kao i prilikom istraživanja karaktera uniformne procesije, tako i prilikom proučavanja arhimedovske metode za mjerenje volumena tijela sa zakrivljenom granicom, Gradić uporno nastoji da dođe do matematičkih rezultata koji se dadu izraziti osnovnim topološkim kategorijama. U ta nastojanja spadaju slijedeće Gradićeve zamisli, navedene redom pojavljivanja u raspravi:

1. nemjerljivost točke;

2. uniforma procesija kao transformacija koja čuva svojstvo jednakosti geometrijskih površina, te definiranje transformacije pomoću tog svojstva;

3. odnos geometrijske tvorevine i njene granice, razmatran pomoću pojma dimenzije geometrijskih veličina;

4. stezanje površine na točku i stezanje površine na kružnicu kao neprekinute transformacije s bitno različitim ishodima;

5. stezanje dužine na točku kao oblik odvijanja graničnog procesa, u kojem se točka prepoznaje kao apsolutni napredak, dakle kao granica;

6. korespondencija elemenata koji sastavljaju tijela kao način utvrđivanja jednakog broja elemenata;

7. prijelaz od konačno mnogo na beskonačno mnogo elemenata koji tvore volumene kratera i stošca, mada uz aktualno shvaćanje zbroja beskonačnog reda i aktualno shvaćanje greške, nastale uslijed aproksimacije tijela pomoću upisane stepeničaste tvorbe;

8. odnos geometrijske tvorevine i njene granice, ispitan pomoću pretpostavki koje koriste izričaje "biti dio od" i "ne biti dio od", tako da je vrlo jednostavno prevesti te pretpostavke u suvremene skupovne oznake:

1. $\mathrm{Fr}\, A \subset A$ ili $\mathrm{Fr}\, A \cap A \neq 0$,

2. $\mathrm{Fr}\, A \cap A = \emptyset$,

gdje je A skup, a Fr A fronta ili granica skupa;

9. sklopljenost ili svezanost geometrijskog tijela granicom prilikom dosizanja granice.

Makar ta Gradićeva nastojanja nisu dovedena do razine zaokružene matematičke teorije, štoviše, većina ih nije urodila željenim plodom, a za neke je propuštena prilika plodnog poopćenja, ipak je tu neprestano na djelu matematički pristup, zbog kojeg Stjepana Gradića valja ubrojiti u *idejne preteče topološkog mišljenja* u matematici.

3. Boškovićeve prosudbe Galileieva paradoksa

S Galileievim paradoksom o jednakosti točke i oboda kruga Ruđer Bošković se suočio u počecima svog matematičkog rada 1740.–1741. godine. To je razdoblje osnovnog Boškovićevog metodičkog izbora: ili geometrijska metoda – ili infinitezimalna metoda, a taj se izbor zbiva unutar misaonog napora da se ispravno shvate beskonačne veličine i pravilno primijene beskonačni postupci.

Mladom Boškoviću je poznato da se od starine beskonačni postupci izražavaju kroz djeljivost veličine u beskonačnost *(divisibilitas in infinitum)*, "a ona se pak dokazuje tako mnogobrojnim i tako očitim geometrijskim dokazima, da nijednom već geometru nije dopušteno o njoj sumnjati"[55]. Ipak, ta se djeljivost različito shvaća, jer ona, povijesno gledano, utemeljuje tri različite metode: metodu ekshaustije, metodu indivizibila i metodu infinitezimala. Sve tri metode iskazuju se u Boškovićevoj raspravi *De motu corporum projectorum in spatio non resistente (O gibanju tijela izbačenih u prostor bez otpora) (1740)* prilikom dokazivanja iste tvrdnje, konkretno tvrdnje o predočivanju puta kojeg tijelo prijeđe ubrzanim gibanjem.

Metoda ekshaustije je metoda starih Grka pomoću upisanih i opisanih likova *(ope inscriptorum et circumscriptorum)*, a izvor Boškovićevog poznavanja te metode je *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni Gregorii a S. Vincentio*

(1647), doista mjerodavno djelo kojim se Bošković po vlastitom iskazu poslužio prvenstveno zbog proučavanja čunjosječnica[56]. Pod metodom infinitezimala Bošković razumijeva Newtonovu metodu prvih i posljednjih omjera u obliku kako je tumači njen autor u *Principia,* 1. 1, sect. 1, a nju poznaje posredstvom prvog sveska komentara *Principia* koje su priredili Thomas Le Seur i Francois Jacquier 1739. godine[57]. Odatle Bošković u punom opsegu citira pojam beskonačno malih veličina ili infinitezimala, koje Newton zove veličinama koje iščezavaju, a Leibniz diferencijama[58], a dodaje i Newtonov stav o kompliciranosti metode ekshaustije. Jedino se o metodi indivizibila Bošković izražava posredno, promičući ispravan pojam infinitezimala: "tâ ne dopušta se da bi beskonačno mali kvantiteti bili kao neki određeni kvantiteti kojih je bar beskonačan broj sadržan u konačnom kvantitetu, nego ih se dapače smatra neodređeno malima i takvima da ih valja umanjivati ispod ma kojih granica"[59]. Tu Bošković prvi put, mada izrijekom ne spominje, kritizira pojam indivizibila.

Godinu dana kasnije u raspravi *De natura et usu infinitorum, et infinite parvorum (O naravi i uporabi beskonačno velikih i beskonačno malih veličina)* (1741) indivizibili su poseban predmet proučavanja. Bošković tada promatra indivizibile kao *hipotezu,* a to bi odgovaralo tradiciji koja vuče podrijetlo iz pitagorejskog učenja, te kao *metodu* u obliku kako ju je izgradio Bonaventura Cavalieri: *indivisibilium methodus Cavalleriana.* Hipoteza o nedjeljivim veličinama ili indivizibilima kao određeno malim ili neumanjivo malim veličinama, dosljedno onda i Cavalierieva metoda, upada prema Boškovićevim riječima u najočitije greške i mnogobrojne apsurde[60]. U to ga osobito uvjeravaju dvije proturječnosti na koje su svratili pozornost upravo matematičari koji su bili pristalice indivizibila, naime Galilei, te Cavalieri u raspri s Guldinom. Prvi primjer je baš Galileiev paradoks o jednakosti točke i oboda kruga, a drugi je Bradwardineov dokaz da paralelogrami jednakih osnovica i visina imaju jednake površine u Cavalierievu i Guldinovu tumačenju pomoću indivizibila.

Tumačenje Galileieva paradoksa Bošković sažima u dvije primjedbe. Prijelaz kojim se od dviju jednakih površina, uz stalno očuvanje jednakosti tih površina, dospijeva do nejednakih veličina, štoviše takvih da je jedna beskonačno mnogo puta veća od druge, očigledno je sporan. Dok Galilei pomicanje ravnine koja siječe krater i stožac i pritom proizvodi jednake presjeke označuje s *continuamente ed egualmente,* te *succesivamente,* a Stjepan Gradić prijelaz karakterizira kao *uniformis processio,* Bošković se ne bavi karakterizacijom prijelaza, podrazumijevajući valjda Galileiev opis. Ali zato razglaba o pretpostavkama i uvjetima uz koje se prijelaz događa.

1. Ako se tim prijelazom površina može stegnuti na točku ili crtu, to svakako znači da je površina sastavljena od točaka, odnosno crta, a to onda znači da se u zaključivanju koristi hipoteza indivizibila. Odatle, dakle, potječe apsurd. Naprotiv, točke, odnosno crte samo ograničavaju površinu, ali je ne zasnivaju[61]. Tu se u Boškovićevu prosuđivanju pojavljuje lako prepoznatljiv aristotelovski argument o strogom lučenju dijela neprekidnine i granice neprekidnine.

2. U prijelazu nestaju površine, pa prema tome i njihova jednakost. Boškovićev argument je nedvosmislen: "I dok su površine, jednake su"[62]. U Galileievu prikazu paradoksa utvrđena je jednakost površina, ni više, ni manje od toga, pa ta jednakost vrijedi isključivo za površine. Odnos jednakosti među površinama je prema tome matematički izraz kojim se očituju entiteti površina. Ali se može zaključivati i dalje. Dokad površine ostaju površine? Što se događa kad se u konačnici procesa točka i crta shvate kao izvjesne "površine"? Upravo tim putem ide suvremeno rješenje Arthura von Oettingena[63]. Dovoljno je da se točka shvati kao kružnica s beskonačno malim polumjerom

r, a kružnica kao kružni vijenac s konstantnim vanjskim polumjerom R i beskonačno malom širinom h. Jednakost koja postoji između površina kruga i kružnog vijenca:

$$r^2 \pi = h(2R - h)$$

održava se i u graničnom procesu:

$$\lim_{r \to 0} r^2 \pi = \lim_{h \to 0} h(2R - h)$$

Uočivši da apsurd u Galileievu paradoksu, kao i u Bradwardineovu dokazu, potječe od hipoteze indivizibila Bošković je ustvrdio da je riječ o jednoj *lažnoj* hipotezi, pa da je uzaludno pomoću takve hipoteze dokazivati djeljivost veličine u beskonačnost[64]. Kako postići da indivizibili ne vode u apsurde? Treba ih, kaže Bošković, *smatrati* neodređeno malim veličinama[65], a tako on naziva infinitezimal. Na početku izlaganja o hipotezi indivizibila on se izražava točnije kad tvrdi da indivizibile valja *zamijeniti* neodređeno malim veličinama[66]. Tim stavovima Bošković participira u Newtonovim shvaćanjima iz ranog razdoblja zasnivanja infinitezimalnog računa, gdje se kritizira Cavalierieva metoda, a ujedno zadržava terminologija i opravdavaju neki rezultati dobiveni tom metodom[67]. U osnovu takvog pristupa infinitezimalu je očuvanje geometrijske predodžbe, pa Boškovićevo opredjeljenje za infinitezimal zapravo znači zagovaranje geometrijske metode.

4. Usporedba Gradićevog i Boškovićevog pristupa Galileievom paradoksu

Gradićevo i Boškovićevo prosuđivanje Galileievog paradoksa u mnogome se razlikuju. Gradićev pristup je bogat matematičkim sadržajima:

1. implicitna kritika pojma indivizibila,
2. uvid da stezanje dužine na točku u dvama različitim razmatranjima, geometrijskom i mehaničkom, predstavlja istu operaciju, naime granični proces, doduše uvid koji je isključivo oslonjen na kvalitativni geometrijski opis, te nije popraćen matematičkim instrumentarijem koji bi to egzaktno razumijevanje graničnog procesa uobličio u novu matematičku metodu,
3. preispitivanje aksiomatske baze euklidske geometrije, osobito isticanje zahtjeva za verifikacijom trećeg Euklidovog aksioma o jednakosti ostataka,
4. razvijanje čitavog niza topoloških ideja, naročito u okviru razmatranja o odnosu geometrijske tvorevine i njene granice.

Boškovićev pristup ima samo jedan smisao: osporavanje hipoteze indivizibila uopće i nijekanje Cavalierieve metode indivizibila kao matematičke metode posebno. To je razumljivo, budući da je Bošković na samom početku svog matematičkog rada 1740.–1741. upoznao Newtonovo tumačenje graničnog procesa u obliku metode prvih i posljednjih omjera, dapače, bavio se raznim geometrijskim i fizičkim problemima koji se rješavaju baš graničnim procesom, kao što su primjerice kružnica oskulacije i put prijeđen ubrzanim gibanjem.

Razlika u Gradićevom i Boškovićevom pristupu uzrokovana je, dakle, epohalnim otkrićem infinitezimalnog računa koje se zbilo u međuvremenu od Gradićevog do Boškovićevog tumačenja Galileievog paradoksa. Dok Gradićev pristup valja ubrojiti u znanstvene napore koji utiru put pojavi infinitezimalnog računa, Boškovićev je pristup tek oblik usvajanja te epohalne tekovine.

Bilješke:

1. S. GRADIĆ, *Dissertationes physico–mathematicae quatuor.* Dissertatio III. (= *De loco Galilaei),* Amstelodami 1680, pp. 39–54.
2. M. D. GRMEK, *L'apport de Dubrovnik aux sciences mathématiques et physiques jusqu'à l'époque de Bošković,* u Actes du Symposium international R. J. Bošković 1961, p. 252.
3. Ž. DADIĆ, *Položaj matematike, fizike i astronomije u kulturnoj prošlosti Dubrovnika i doprinos Dubrovčana tim znanostima (do početka 19. stoljeća),* u Rasprave i građa za povijest nauka 3, Zagreb 1969, p. 49.
4. Ž. DADIĆ, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata I. Znanstveno djelovanje Stjepana Gradića u Rimu,* Zagreb 1982, p. 218.
5. Ib., p. 229.
6. S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* p. 41.
7. G. GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (= Discorsi), u Opere IV, Firenze 1935, pp. 152–161.*
8. "In oltre, quel comporre la linea di punti, il divisibile di indivisibili, il quanto di non quanti, mi paiono scogli assai duri da passargli.", u G. GALILEI, *Discorsi,* p. 154.
9. L. c.
10. "Ma ricordiamoci che siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la lor grandezza, e questi per la lor picolezza.", u *Discorsi,* p. 154.
11. "alcuna mia fantasticheria, se non concludente necessariamente, almeno, per la novità, apportatrice di quelche maraviglia.", l. c.
12. *Discorsi,* pp. 154–155.
13. Ib., p. 158.
14. Ib., p. 157.
15. Ib., pp. 160–161.
16. S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* pp. 53–54.
17. Ib., p. 39.
18. Ib., p. 53.
19. Ib., p. 39, p. 53.
20. *Biografia universale antica e moderna XIX,* Venezia 1824, pp. 379–381.
21. S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* p. 41.
22. L. c.
23. Ib., p. 53.
24. "Haec tu cum Laurentio Magalotto adolescente lectissimo doctissimoque ut communices rogo, et de utriusque sententia ad me aliquid hac de re perscribas.", u *De loco Galilaei,* p. 54.

25. L. c.

26. *Biografia universale XXXIII,* Venezia 1827, pp. 278–280; J. C. POGGENDORFF, *Biographisch–literarisches Handworterbuch zur Geschichte der exacten Wisswnschaften II,* Leipzig 1863, p. 10; G. GABRIELI, *Accademia del Cimento,* u Enciclopedia italiana X (1931), pp. 249–250.

27. S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* p. 41.

28. L. A. MURATORI, *Annali d'Italia dal principio dell'era volgare XI,* Milano 1749, p. 279, p. 284.

29. S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* p. 42.

30. "cum alioquin etiam in eo quod familiaria doctorum hominum colloquia imitanda suscipit, proxime ad poétices naturam accedit, ...", o. c., p. 52.

31. Ib., p. 53. Cfr. HEZIOD, *Poslovi i dani,* preveo Albert Bazala, pjesnički dotjerao Nikola Miličević, predgovor i pogovor Vladimir Bazala, v. 40, p. 15, gdje prepjev ne pogađa smisao izvornika: "Lude koje ne znadu da pol je više od cijelog.", dok je u pogovoru V. BAZALE istaknuta autobiografska pojedinost na koju se odnose dotični Hezeiodovi stihovi, p. 186. Gradićevo pozivanje na Heziodove stihove o diobi, i to u grčkom izvorniku i latinskom prijevodu, nije samo izraz Gradićeve erudicije, već još jedna potvrda da je rasprava upućena vrsnom znalcu grčke starine, kakav je doista bio Ottavio Falconieri.

32. "Id enim primo a veritate longissime distat, ...", u *De loco Galilaei,* p. 42.

33. EUKLID, *Elemnti I,* Beograd 1949, p. 5; komentar A. BILIMOVIĆA, pp. 48–50.

34. "ac proinde punctum ipsum, hoc est rem nullius mensurae quantitati trinae dimensae statuemus aequalem.", u *De loco Galilaei,* p. 42.

35. "... si secentur quocumque plano GL ad basim coni parallelo, semper superficies circularis HL quae à cono aufertur respondenti sibi superficiei orbiculari GION (quam Galilaeus *nastrum* sive fasciam appelat) semper est aequalis, ...", o. c., p. 43.

36. Ib., p. 44.

37. Ib., p. 43.

38. Ib., p. 44.

39. Ib., p. 45.

40. Ib., pp. 45–47.

41. Ib., p. 47.

42. S. GRADIĆ, *De causa naturali motus accelerati et aequalibus ejus in descensu corporum gravium ad aequalia momenta temporum incrementis,* u *Dissertationes physico–mathematicae quatuor,* pp. 35–37. Cfr. Ž. DADIĆ, Povijest egzaktnih *znanosti u Hrvata I,* Zagreb 1982, pp. 228–229.

43. "..., adeoque posita tali sectione infinitis intervallis distincta et consequenter posita illa prima velocitate omnium possibilium minima, et in punctum redacta, per quod exprimitur primum instans motus, hoc est quies ipsa, à qua datus motus incipit, ...", u S. GRADIĆ, *De causa naturali motus accelerati,* p. 35.

44. I. NEWTON, *De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur,* u *Opera quae exstant omnia II. Philosophiae naturalis principia*

mathematica (1687), 1. 1, sect. 1, Faksimile–Neudruck der Ausgabe von Samuel Horsley, Stuttgart–Bad Cannstatt 1964, pp. 30–41.

45. DEMOKRIT, VS B 155, u *Predsokratovci II,* Zagreb 1983, p. 169; O. BECKER, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung,* Frankfurt 1975, p. 56.

46. G. GALILEI, *Discorsi,* p. 159.

47. Za dokaz jednakosti kratera i stošca vidi: L. VALERIO, *De centro gravitatis solidorum,* 1. 2, prop. 22; G. GALILEI, *Discorsi,* pp. 158–159; S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* pp. 47–48.

48. S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* pp. 48–50. Potcrtao sam sve pojmove, bitne za matematičko razumijevanje teksta.

49. "li quali (la circoferenza di un cerchio e un sol punto) perchè non si devon chiamare eguali, se sono le ultime reliquie e vestigie lasciate da grandezze eguali?", u G. GALILEI, *Discorsi,* p. 157.

50. Cfr. EUKLID, *Elementi I,* pp. 6–7, komentar A. BILIMOVIĆA, p. 57; S. BARKER, *Filozofija matematike,* Beograd 1973, pp. 44–45.

51. "..., vel enim punctum et circumferentia, de quorum aequalitate ille pronunciat, concurrunt tanquam partes ad componendum integraliter craterem et conum, ...", u S. GRADIĆ, *De loco Galilaei,* p. 50.

52. "..., si, ut res est, nec punctum ad conum, nec circumferentia ad craterem tanquam partes integrales concurrunt, ...", o. c., p. 51.

53. "nam ad verificandum axioma de aequalitate residui ex aequalitate ablatorum à totis aequalibus, necesse est, ut illa tot(a) aequalia quae invicem comparantur à suo quaeque ablato, et residuo tanquam à partibus integrantibus componantur, ...", l. c.

54. L. c.

55. R. BOŠKOVIĆ, *De natura et usu infinitorum et infinite parvorum,* Romae 1741, n. 2.

56. R. BOŠKOVIĆ, *De motu corporum projectorum in spatio non resistente,* Romae 1740, p. 19, u drugom sholiju.

57. Ib., p. 7.

58. Ib., pp. 7–8.

59. Ib., p. 7.

60. R. BOŠKOVIĆ, *De natura et usu infinitorum et infinite parvorum,* n. 2.

61. "Id vero absurdum inde profluit, quod superficies tanquam lineis, et punctis contexta consideratur, cum iis terminetur tantum, non etiam constet.", o. c., n. 3, p. 4.

62. "Dum areae sunt aliquae; aequales sunt.", l. c.

63. G. GALILEI, *Unterredungen und mathematische Demonstrazionen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend,* herausgegeben von Arthur von Oettingen, Leipzig 1917, Anmerkung zu S. 28, pp. 130–131.

64. R. BOŠKOVIĆ, *De natura et usu infinitorum et infinite parvorum,* n. 5, p. 4.

65. "*considerare* parallelograma gI,hM indefinite parva", o. c., n. 4.

66. "Indivisibilium hypothesis in errores inducit apertissimos, ac indivisibilium methodus Cavalleriana, nisi ita adhibeatur, ut pro indivisibilibus indefinite parva *substituantur;* in absurda quam plurima incurrat, necesse est.", o. c., n. 2.

67. J. ITARD, *From Symbolic Algebra to Infinitesimal Calculus,* u R. TATON, *A general history of the sciences II,* London 1967, p. 228.

GALILEO'S PARADOX ON THE EQUALITY OF POINT AND LINE IN THE EVALUATION OF STJEPAN GRADIĆ AND RUĐER BOŠKOVIĆ

Summary

When he printed his physico–mathematical collection *Dissertationes physico–mathematicae quatuor* at Amsterdam in 1680 Stjepan Gradić published his sole mathematical treatise *De loco Galilaei quo punctum lineae aequale pronuntiat.* That treatise has not been studied to date. According to Gradić the treatise in question was supposed to deal with Galileo's consideration on the nature of infinity from the *Discorsi* (1638), especially Galileo's paradox on the equality of point and line. The coincidence that Ruđer Bošković, too, considered the same paradox of Galileo in *De natura et usu infinitorum et infinite parvorum* (1741) permits a comparison of Gradić's and Bošković's views. Hence, the consideration of Gradić's treatise *De loco Galilaei* includes (1) problem determination and geometrical construction of Galileo's paradox; (2) Gradić's evaluation of Galileo's paradox and, indirectly, the understanding of infinite processes and infinite quantities; (3) Bošković's evaluation of Galileo's paradox.

The detailed reading of Galileo's first dialogue confirms Gradić's finding. The paradox on the equality of point and circumference of circle is grounded in the sharp exchange between Salviati and Simplicio on the problem of composition and resolution of continuum. Galileo's discussants espouse two conflicting heritages, those of the Neoplatonists and Peripateticists. The exposition of the paradox does not contribute to the narrowing of the gap between the conversants and, therefore, as an open problem the paradox becomes a challenge for further mathematical investigation of continuity and infinity.

The genesis of Gradić's participation in the discussion on Galileo's paradox can be reconstructed on the basis of the data which the author stated in the text of his treatise. Gradić discussed Galileo's proposition first of all with Ottavio Falconieri and Giulio Montevecchio in Falconieri's cabinet and later with unnamed additional scientists, who, though Galileans, were critical toward Galileo's dialogues; they were probably members of the literary–scientific circle gathered around Queen Christina of Sweden. Finally, Gradić wrote a treatise in a form of a letter addresed to Falconieri, with the aim of having Falconieri discuss the same topic with Lorenzo Magalotti, the secretary of Florentine *Accademia del Cimento* during the royal wedding feast in Florence. As a result, it follows that the treatise was completed before April 1661, although it was published as late as 1680. It remains to establish the role played by Gradić's contacts with the *Accademia del Cimento* in the genesis of the treatise.

In the process of studying Galileo's analysis of infinity Gradić researched the following aspects of the problem: (1) the sense of the final consequence of the

paradox; (2) uniform procession as a limiting process; (3) Archimedean method for the measuring of volume with curved limit. All three dimensions of Gradić's research are here evaluated in the context of historical development of the problem of continuity and infinity.

The falsity of the claim on the equality of point and line is all the more evident from the consequence of such a claim. If the point is equal to the line, then, in the same way, the line is equal to the surface, the surface is equal to the body, and, in the final order, the unmeasurable point is equal to the tridimensional body. Such a conclusion is in contradiction to Euclid's definition of point. Gradić interpreted this definition when he prefered, as more precise, the view that the point is unmeasurable, as opposed to seeing it as indivisible, thereby implicitly disputing the indivisible.

According to Gradić the key procedure in Galileo's proof of equality between point and line is uniform procession *(uniformis processio)* as a procedure which is conducted for the sections of cone and crater by means of translation of plane, which is parallel to the base of these bodies, directed toward their vertexes (see Fig. 1). Using uniform procession Gradić endeavored to understand the limiting process, to be sure only by means of qualitative geometrical description, and not by means of mathematical apparatus that would be internal to the limiting process itself. The above investigation of the character of Gradić's uniform procession, coupled with the comparative analysis of the use of concepts of absolute triangle and absolute progress in his works *De causa naturali motus accelerati* and *De loco Galilaei,* show that Gradić's understanding of the limiting process was more advanced in comparison to Galileo's views.

In his search for the source of the paradox Gradić extensively commented on and questioned Valerio's proof of the equality between volumes of cone and crater, based on the atomistic ideas of Democritus and Archimedes (see Fig. 2). His attention was attracted especially by the transition from the finite to the infinite number of elements that make the volumes of cone and crater. Very much in the spirit of ancient Pythagorean tradition Gradić observed the increase of the number of elements and the decrease of the individually observed element as simultaneous infinite processes. The sum of infinite number of elements, that is, the sum of infinite series, is understood in the actual sense and is established as a finite quantity. By analogy, the "error" that results from the body's approximation with the aid of inscribed denticulated form, too, is understood in the actual sense, however as infinite small quantity.

Evaluating Valerio's proof Gradić separately researched the relation between geometrical object and its limit. He posited two mutually opposing suppositions: (1) the point and the circumference of circle *are* component parts of cone and crater; (2) the point and the circumference of circle *are not* component parts of cone and crater. Gradić then proved that each individually lead toward a contradiction. Opposite Gradić's expectations the relation between the geometrical object and its limit is *undecidable* for the establishment of error in Galileo's paradox. Gradić utilized Euclid's axioms on the equality and inequality of quantities (A2 – A4) and stressed a demand for the verification of Euclid's third axiom on the equality of residues. As a result, it follows that Gradić considered the statement of this third axiom to be a logical deduction that can be used only in geometrical proofs when: (1) if it is already proven that the premises are true; and (2) if the concept of operation that the statement of axiom implies (the concept of substraction of infinite parts) is defined in a mathematically precise way.

Throughout his treatise Gradić sought to reach mathematical results that can be expressed. in fundamental topological categories. These attempts, in the order of their appearance in the text, are:

(1) the unmeasurability of point;

(2) the uniform procession as a transformation that safeguards the property of equality between sections of cone and crater, thereby defining this transformation by means of the property of equality;

(3) the relation of geometrical object and its livit from the point of view of the dimension of geometrical quantities;

(4) the contraction of surface toward point and the contraction of surface toward circle as continious transformations with the essentially different results;

(5) the contraction of line toward point as a form of progression in limiting process in which point is recognized as absolute progression, that is, as limit;

(6) the correspondence of elements that compose geometrical bodies as means of establishing the equal number of elements;

(7) the transition from finite to infinite number of elements that make the volumes of cone and crater;

(8) the relation of geometrical object and its limit, examined by means of suppositions that use expressions "to be a part of" and "not to be a part of," so that it is very simple to translate these suppositions into contemporary set symbols:

1. $\mathrm{Fr}\, A \subset A$ or $\mathrm{Fr}\, a \cap A = \emptyset$,

2. $\mathrm{Fr}\, A \cap A = \emptyset$,

where A is a set, and Fr A is a front or a limit of set;

(9) the coalescence of geometrical body by limit.

Although the cited approaches by Gradić never were brought to the level of rounded mathematical theory, moreover most did not yield the desired results, in some cases Gradić having bypassed the chance for a fruitful generalization, nevertheless one sees here an active mathematical approach on account of which Stjepan Gradić must be counted among the *ideational forerunners of topological thought* in mathematics.

Ruđer Bošković's approach to Galileo's paradox was different from Gradić's. Where Gradić implicitly disputed the indivisibles, seeking first of all to understand the limiting process and develop his topological ideas, at the beginning of his mathematical work from 1740 to 1741 Bošković was already familiar with Newton's interpretation of limiting process by means of the method of first and last ratios. Moreover, he dealt with various problems of geometry and physics that are solved precisely by means of limiting process, but always within geometrical conceptions, for example the circle of osculation and the path crossed by uniform accelerated motion. That is why the basic reason for Bošković's exploration of Galileo's paradox in the treatise *De natura et usu infinitorum et infinite parvorum* (1741) is the negation of the hypothesis of invidisibles and Cavalieri's method of indivisibles. The difference between Gradić's and Bošković's approach was a result of the epochal discovery of calculus that occurred in the interval from the time of Gradić's interpretation of Galileo's paradox to that of Bošković.